



Universidad
Zaragoza

TRABAJO DE FIN DE GRADO

**IMPACTO DE LAS INTERACCIONES DE ALTO
ORDEN EN DINÁMICAS DE SINCRONIZACIÓN**

Autor:

Shanti Ramoneda Perales

Directores:

Dr. Jesús Gómez Gardeñes

Santiago Lamata Otín

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

FACULTAD DE CIENCIAS

Septiembre 2024

Índice

1. Introducción	1
2. Marco Teórico.	2
2.1. Estructuras con interacciones de alto orden	2
2.1.1. Modelos de estructuras con interacciones de alto orden	4
2.2. Sistemas dinámicos	6
2.2.1. Modelo de Kuramoto	7
2.2.2. Dinámica de consenso	8
2.2.3. Modelo de células marcapasos	8
2.2.4. Neuronas de Izhikevich	10
3. Transición explosiva por acoplo estructura-dinámica	12
3.1. Interacciones de alto orden como ruta natural hacia la explosividad	12
3.2. Influencia de la forma funcional	15
3.3. Influencia de la estructura	16
3.4. El problema de la sincronizabilidad	19
4. Interacción tripartita neurona-glia	21
5. Conclusiones	24
Apéndices	26
A. Colección de parámetros y siglas	26
B. Valores de las constantes de los distintos modelos usados	28
C. Gráficas incluyendo trayectorias <i>backwards</i>	29
D. Resultados para el modelo de células marcapasos original	30
E. Modelo Izhikevich para valores altos del acoplo	31
F. Modelo Izhikevich fijando el número total de neuronas y glías	32
G. Diagrama de estabilidad del modelo Kuramoto con interacciones de alto orden	32

1. Introducción

La gran mayoría de las ramas de las ciencias físicas han operado tradicionalmente bajo la tesis reduccionista, que sostiene que para comprender las propiedades de un sistema basta con estudiar sus partes a nivel fundamental. Al tratar de explicar comportamientos colectivos que ocurren por la interacción de grandes números de partículas o elementos de un sistema, el enfoque reduccionista se topa con sus limitaciones. En consecuencia, la física estadística surge del intento de relacionar variables microscópicas y macroscópicas. Conforme este área ha avanzado, ha ido dando lugar, entre otros, al nacimiento de la física de sistemas complejos, un área con un enfoque interdisciplinar usando la base y las herramientas que otorga la física estadística. Un concepto clave muy estudiado en la física de los sistemas complejos es el de fenómeno emergente, denominado así como aquel que aparece a partir de un cierto nivel de complejidad de un sistema, y cuya explicación es irreductible a las partes del mismo.

Los fenómenos emergentes ocurren en una variedad de contextos, ya sea en la física como en la biología, la ecología o la sociología. Los que son más pertinentes a este trabajo son los fenómenos de sincronización, en los que los elementos de un sistema tienden a un mismo estado en función de distintos parámetros de éste. Un modelo paradigmático de los fenómenos de sincronización es el modelo Kuramoto[3], el cual muestra una transición de fase entre un estado incoherente y uno sincronizado para un sistema de osciladores en función de la intensidad del acoplo entre ellos. Esta transición de fase puede ser de primer o segundo orden en función de la topología de la red compleja de interacciones o las características de los elementos. Por ejemplo, la transición es de segundo orden si los osciladores se encuentran en una red modelada como un grafo que considera únicamente interacciones a pares, pero también se ha mostrado cómo bajo otras condiciones la transición es de primer orden[1]. En especial, Battiston et al. postularon la existencia de interacciones grupales como una ruta natural hacia la explosividad en transiciones de fase en dinámicas de sincronización y contagio[7], entendiendo por transición explosiva aquí como una transición de primer orden. Las interacciones grupales, también llamadas de alto orden son una generalización del concepto de interacción entre dos elementos usual que se encuentra en las redes, suponiendo en este caso interacciones grupales entre un número mayor de elementos. El objetivo principal de este trabajo es el de cuestionar la validez de este postulado, y ver bajo qué condiciones las interacciones de alto orden llevan a transiciones de fase de primer orden.

El hallazgo de las transiciones explosivas se ha vuelto especialmente importante en áreas como la neurociencia, donde fenómenos de biestabilidad o cambios abruptos en los estados de un sistema son relevantes a la hora de entender distintas condiciones como la percepción biestable[21], convulsiones epilépticas en el cerebro[22, 23] o hipersensibilidad en dolor crónico en pacientes con fibromialgia[24]. Para ahondar en esta cuestión, se explorarán las interacciones de alto orden variando distintos aspectos de la estructura, como su naturaleza aleatoria o geométrica, sobre distintas dinámicas que presentan fenómenos de sincronización en redes, como son el mismo modelo Kuramoto, una dinámica de consenso[5, 6], un modelo para las células marcapasos que regulan los latidos del corazón[11], o el modelo Izhikevich para neuronas biológicas[13, 14], presentando los distintos modelos dinámicos como casos particulares de un modelo general que aúna los distintos aspectos que pueden variar entre ellos. Finalmente, también se hará hincapié en lo cercanos o no que pueden ser estos modelos con la realidad biológica que representan, así como formas en que se pueden mejorar para ser más rigurosos.

2. Marco Teórico.

2.1. Estructuras con interacciones de alto orden

Las redes complejas son directorios o catálogos de las componentes de un sistema y sus interacciones. Tradicionalmente, los grafos son el objeto matemático que se usa para describirlas. Un grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{L})$ está definido por dos conjuntos de elementos, a saber, $\mathcal{N} \neq \emptyset$ y \mathcal{L} . Los elementos de \mathcal{N} , que representan los distintos componentes del sistema, se denominan nodos o vértices, y se etiquetan con un índice $i = 1, \dots, N$. Por otra parte, los elementos de \mathcal{L} son pares (i, j) de distintos elementos de \mathcal{N} llamados *links* o aristas, que suelen indicar una interacción entre los nodos en cuestión. La manera de almacenar esta información es mediante una matriz de adyacencia $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$, de tamaño $N \times N$, cuyos elementos se definen tal que el elemento de matriz $a_{ij} = 1$ si existe una interacción entre los nodos (i, j) y $a_{ij} = 0$ de otra forma. En este trabajo vamos a considerar únicamente redes no pesadas y no dirigidas, por lo que \mathbf{A} es una matrix simétrica.

Podemos caracterizar la organización local de las interacciones a pares mediante el coeficiente de clustering local, que se define localmente como el cociente entre el número de triángulos¹ conectados al nodo i entre el número de posibles triángulos conectados al mismo:

$$C_i = \frac{2E_i}{k_i(k_i - 1)}, \quad (1)$$

donde E_i es el número de triángulos conectados a i . La media del clustering local de todos los nodos se conoce como clustering global o de la red:

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i, \quad (2)$$

Hay ocasiones en las que las interacciones entre pares no son suficientes para describir la estructura de un sistema, y es necesario considerar interacciones en grupos. Estas interacciones, también denominadas de alto orden, son representadas mediante hiperaristas, una generalización del concepto de arista a grupos de más de dos nodos.

El objeto matemático para representar las interacciones de alto orden es un hipergrafo $\mathcal{H} \equiv (\mathcal{N}, \mathcal{E})$, donde \mathcal{N} es el mismo conjunto de elementos definido previamente para un grafo y \mathcal{E} el conjunto de hiperaristas. Cada elemento $e \in \mathcal{E}$ es un subconjunto de los nodos en \mathcal{N} que indica una interacción grupal entre tales componentes, y se puede caracterizar mediante su orden $m[2]$. El orden de una interacción se define a partir de la cardinalidad del subconjunto según $m = |e| - 1$. Por lo tanto, hiperaristas de orden 1 representan interacciones a dos cuerpos como las de un grafo, las de orden 2 interacciones a tres cuerpos, etc. Para almacenar la información, podemos definir el tensor de adyacencia $\mathbf{A}^{(m)} = \{a_{i,j_1,\dots,j_m}^{(m)}\}$, cuyos elementos $a_{i,j_1,\dots,j_m}^{(m)} = 1$ si los nodos (i, j_1, \dots, j_m) están contenidos en una hiperarista de orden m , o son cero de otra manera. Nótese que para $m = 1$ se recupera la matriz de adyacencia.

Los hipergrafos se pueden caracterizar mediante una serie de observables. En particular, el grado generalizado da cuenta del número de hiperaristas de orden m a las que pertenece un

¹Entendemos triángulo como el motivo formado por tres nodos totalmente conectados mediante interacciones a pares.

cierto nodo i se define como

$$k_i^{(m)} = \frac{1}{m!} \sum_{j_1, \dots, j_m=1}^N a_{ij_1 \dots j_m}^{(m)}. \quad (3)$$

A partir del grado generalizado de cada nodo, podemos calcular el grado medio generalizado de la red de orden m como

$$\langle k^{(m)} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i^{(m)}. \quad (4)$$

A partir del grado de los nodos, se puede definir la matriz diagonal de grado generalizado $\mathbf{D}^{(m)}$ como aquella cuyo elemento $d_{ij}^{(m)} = mk_i^{(m)}$ si $i = j$, y $d_{ij}^{(m)} = 0$ de otra manera. Juntando la matriz diagonal de grado generalizado y el tensor de adyacencia, se define la matriz laplaciana generalizada $\mathbf{L}^{(m)} = [9]$, que es otra manera de codificar la información de una estructura. En particular, sus elementos $\ell_{ij}^{(m)}$ se definen según

$$\ell_{ij}^{(m)} = d_{ij}^{(m)} - b_{ij}^{(m)}, \quad (5)$$

donde $\mathbf{B}^{(m)}$ es la matriz de interacción generalizada y representa el número de interacciones de orden m donde tanto i como j aparecen,

$$b_{ij}^{(m)} = \frac{1}{(m-1)!} \sum_{j_2, \dots, j_m}^N a_{i, j_1, \dots, j_m}^{(m)}. \quad (6)$$

A partir de los grados generalizado de los nodos de la red, se define también la distribución de grado generalizada como la probabilidad de que un nodo tenga grado $k^{(m)}$:

$$P(k, m) = \frac{N_{k^{(m)}}}{N}, \quad (7)$$

donde $N_{k^{(m)}}$ es el número de nodos con grado generalizado $k^{(m)}$.

En cuanto a la organización local de los hipergrafos, hay que tener en cuenta que para $m > 1$ dos hiperaristas pueden contener el mismo subconjunto de nodos. El *intra-order hyperedge overlap* [2] mide el grado de solapamiento de las hiperaristas de orden m a las que pertenece un nodo i :

$$T_i^{(m)} = 1 - \frac{S_i^{(m)} - S_i^{(m),-}}{S_i^{(m),+} + S_i^{(m),-}}, \quad (8)$$

donde $S_i^{(m)}$ es el número de vecinos únicos del nodo i , y $S_i^{(m),\pm}$ el número máximo y mínimo respectivamente de vecinos únicos posibles del mismo. Se entiende aquí por vecino único de i como aquel nodo j que se encuentra en al menos una hiperarista en la que está i . Las cantidades $S_i^{(m),\pm}$ pueden ser calculadas analíticamente como $S_i^{(m),+} = mk_i^{(m)}$ y $S_i^{(m),-} = \lceil n \rceil$, donde n se define implícitamente como $\binom{n}{m} = k_i^{(m)}$. Para $m = 2$, esto da lugar a $n = \frac{1 + \sqrt{1 + 8k_i^{(2)}}}{2}$. En la Figura 1 se puede ver un ejemplo de varios hipergrafos con distintos grados de *hyperedge overlap*. Cuando el número de vecinos únicos es el máximo posible, que para el caso de hiperaristas de orden $m = 2$ esto se corresponde con el doble de vecinos que de aristas, no hay solapamiento ($T_i = 0$, Figura 1(a)). En cambio, cuando el número de vecinos únicos es igual al mínimo número de vecinos únicos posible, es decir, cuando hay el mismo número de hiperaristas que de vecinos,

tenemos un grado de solapamiento total ($T_i = 1.0$, Figura 1(c)).

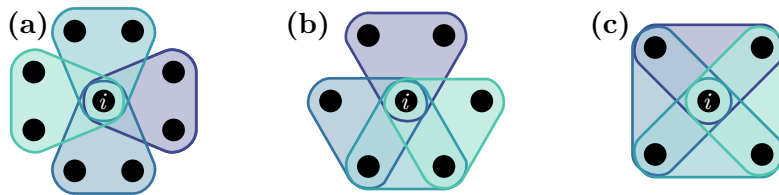


Figura 1: **Intra-order hyperedge overlap.** Hipergrafos con distintos valores de *intra-order hyperedge overlap* para el nodo i con grado generalizado de alto orden $k_i^{(2)} = 4$: (a) $T_i = 0.0$; (b) $T_i = 0.5$; (c) $T_i = 1.0$.

Finalmente, a partir de los métricas locales, podemos definir mediante una media pesada un valor del *intra-order hyperedge overlap* global de una red

$$\mathcal{T}^{(m)} = \frac{\sum_i k_i^{(m)} T_i^{(m)}}{\sum_i k_i^{(m)}}. \quad (9)$$

2.1.1. Modelos de estructuras con interacciones de alto orden

Las propiedades de las estructuras de interacción difieren en función de la naturaleza del sistema que representan. Por ello, existen distintos modelos de redes con interacciones de alto orden que permiten controlar dichas propiedades.

Los hipergrafos con interacciones aleatorias son la estructura más simple, ya que se forman añadiendo interacciones de manera aleatoria entre un número fijo de N nodos. En estos hipergrafos, la distribución de grado generalizado sigue una ley de Poisson, es decir, la mayoría de nodos tendrá un grado cercano al grado medio de la red. Cuando la red solo tiene interacciones de orden 1, se recupera el modelo Erdős-Rényi. En la Figura 2 se puede ver un ejemplo de este modelo con interacciones de orden 1 y 2, donde las aristas están representadas por líneas negras uniando nodos y las hiperaristas son triángulos azules que tocan tres nodos.

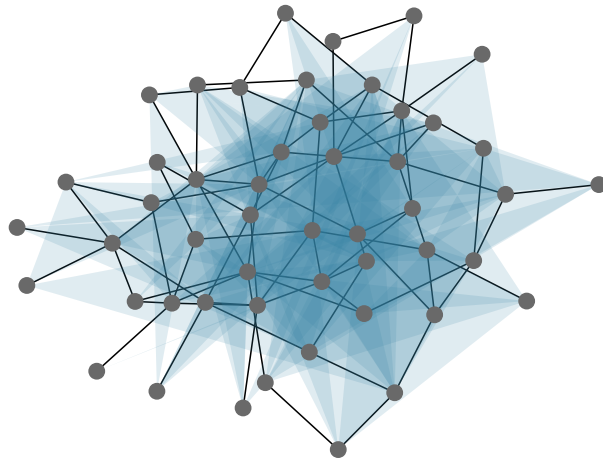


Figura 2: **Estructura aleatoria.** Red aleatoria de 50 nodos generalizada a alto orden de grado medio $\langle k^{(1)} \rangle = \langle k^{(1)} \rangle = 3$.

Otro tipo de estructuras son las geométricas, que pretenden caracterizar sistemas en las que la correlación o cercanía espacial de los elementos es determinante para que existan o no las interacciones. Ciertas redes de transporte o redes de sistemas biológicos como las neuronales pueden modelizarse de esta manera. En particular, una estructura geométrica aleatoria es un tipo de estructura en la que los nodos se sitúan en un cierto espacio 2D. Para cada orden de interacción m , se consideran como interacciones a todas aquellas combinaciones de m nodos

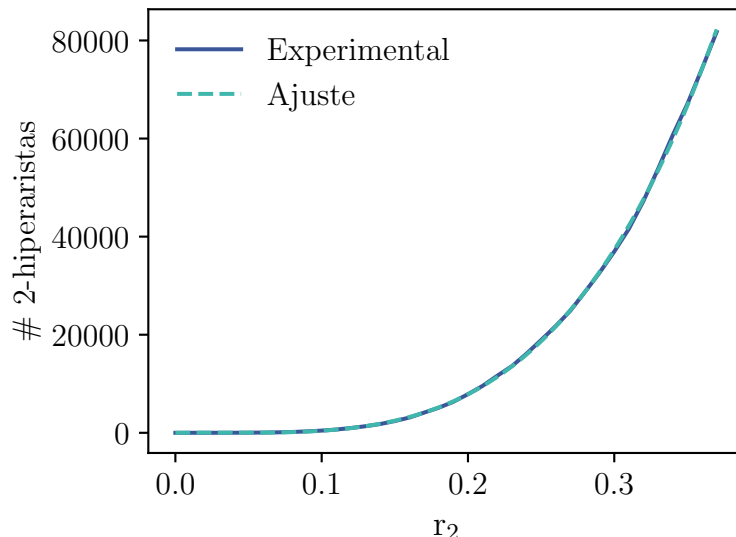


Figura 3: **Hiperaristas.** Número de 2-hiperaristas con respecto al radio en una red geométrica aleatoria de orden $m = 2$ con 200 nodos y ajuste a $f(x) = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4$.

a	b	c	d
$(3 \pm 4) \cdot 10^3$	$(-1.1 \pm 0.6) \cdot 10^5$	$(9 \pm 2) \cdot 10^5$	$(2.6 \pm 0.4) \cdot 10^6$

Tabla 1: Valores del ajuste a $f(x) = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4$ de la Figura 3

que pueden circunscribirse en un círculo de radio r_m . Si $m = 1$, el grado medio se relaciona con el radio de manera que $\langle k^{(1)} \rangle = \frac{1}{2} \rho \pi r_1^2$, siendo ρ la densidad de nodos en el espacio. En las Figuras 4(a)-(c) se puede ver cómo aumenta el número de interacciones de la estructura conforme se aumentan los radios de interacciones a dos y tres cuerpos con $r_1 = r_2$. Para conocer la dependencia con el radio en el caso de $m = 2$, se ha medido la evolución del número de hiperaristas de orden 2 conforme se aumenta el radio sobre la misma red y se ha hecho un ajuste a una serie de Taylor truncada a la cuarta potencia, como se puede ver en la Figura 3. Para las simulaciones, se han considerado 200 nodos situados en una cuadrícula de lado $L = 1$ y el ajuste, hecho con las herramientas que proporciona la librería *scipy* de python, da como resultados los valores mostrados en la Tabla 1.

Dependiendo del contexto, las interacciones de alto orden se pueden entender como interacciones a más de dos cuerpos en las que una interacción entre dos elementos es mediada por otro elemento o elementos de naturaleza diferente. Estos elementos mediadores permiten, en ocasiones, un alcance mayor que las interacciones pares. Casos como este se dan en redes de neuronas en el cerebro, donde ciertos tipos de glías, que son células que acompañan a las neuronas e intervienen en distintos procesos relacionados con éstas, favorecen interacciones de largo alcance entre poblaciones de neuronas segregadas [16, 17]. Para capturar esto en un modelo de estructura, aumentamos r_m (para $m > 1$) pero manteniendo el grado medio $\langle k^{(m)} \rangle$ fijo. En ese caso, no se añaden todas las hiperaristas que cumplirían la condición dada por r_m , sino que se añaden con una probabilidad que dé como resultado el grado medio deseado. Para interacciones a tres cuerpos, dicha probabilidad se puede obtener de la función calculada mediante el ajuste de la Tabla 1. Mediante dicha relación, sabemos que un grado medio $\langle k^{(2)} \rangle = 5$ (1000 2-hiperaristas para una red de 200 nodos) se corresponde con un radio $r_2 = 0.121$, que es la única solución real positiva de la función. Si queremos obtener el mismo grado medio para otro radio superior r'_2 que se corresponde con un grado medio $\langle k^{(2)'} \rangle$, nos deberemos quedar con las hiperaristas

obtenidas con ese radio con una probabilidad $p = \frac{5}{\langle k^{(2)} \rangle}$. En las Figuras 4(d)-(f) se muestran tres estructuras generadas mediante este método, para un r_1 fijo y aumentando paulatinamente r_2 . Es notable que las interacciones de alto orden ponen bajo interacción zonas lejanas que no estaban conectadas previamente.

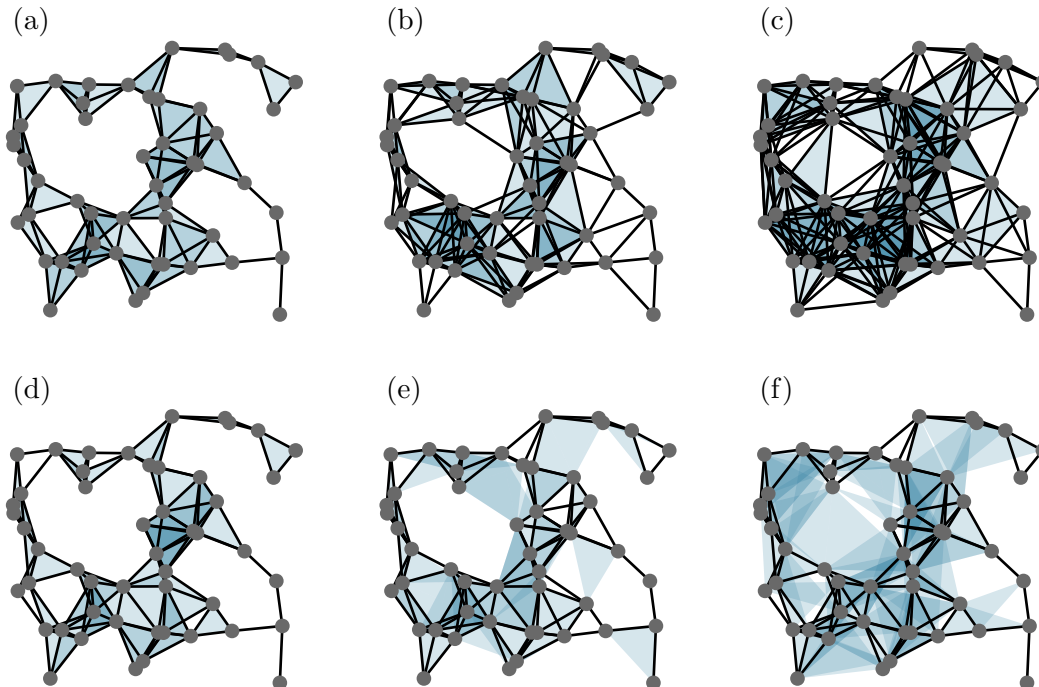


Figura 4: **Estructura geométrica aleatoria.** Distintas variaciones de una red geométrica aleatoria generalizada a alto orden de 50 nodos. En los paneles (a)-(c), se muestra la misma red conforme aumentan los radios, siendo en (a) $r_1 = r_2 = 0.2$, en (b) $r_1 = r_2 = 0.25$ y en (c) $r_1 = r_2 = 0.3$. En los paneles (d)-(f) se muestra la red dejando $r_1 = 0.2$ fijo y aumentando r_2 , en (d) $r_2 = 0.2$, en (e) $r_2 = 0.25$ y en (f) $r_2 = 0.35$. El grado medio de orden 1 de los paneles (a), (d), (e) y (f) es $\langle k^{(1)} \rangle = 5$, del (b) $\langle k^{(1)} \rangle = 7.6$ y del (c) $\langle k^{(1)} \rangle = 11.2$. En todos los casos, $\langle k^{(2)} \rangle = 5$. El *intra-order hyperedge overlap* de los paneles (a), (b), (c), (d), (e) y (f) es, respectivamente, $\mathcal{T} = 0.8, 0.7, 0.5, 0.8, 0.7, 0.4$.

2.2. Sistemas dinámicos

A continuación, pasamos a describir los modelos de sistemas dinámicos acoplados a través de hipegrafos. Comenzamos considerando el siguiente sistema genérico de N osciladores acoplados a través de interacciones de órdenes $m = 1, 2$:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i) + \sigma^{(1)} \sum_{j=1}^N a_{ij}^{(1)} \mathbf{g}^{(1)}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) + \sigma^{(2)} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_{ijk}^{(2)} \mathbf{g}^{(2)}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k), \quad (10)$$

donde \mathbf{x}_i es el vector n -dimensional que expresa el estado de cada nodo y la función $\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i)$ describe la dinámica local. Las funciones $\mathbf{g}^{(1)}$ y $\mathbf{g}^{(2)}$ son las denominadas funciones de acoplo, que describen la forma en la que los nodos interactúan entre ellos. Las constantes $\sigma^{(1)}$ y $\sigma^{(2)}$ representan la fuerza del acoplo de las interacciones a pares y a tríos respectivamente. La forma de estas funciones determinará el tipo de sistema dinámico que se tiene. A continuación, presentamos varias formas que pueden tomar estas ecuaciones con las que se pueden recuperar distintos modelos de sistemas dinámicos conocidos en la literatura como el modelo de Kuramoto

[3], el modelo de consenso [5], el modelo de células marcapasos [12] o el modelo de neuronas de Izhikevich[13].

2.2.1. Modelo de Kuramoto

En el modelo Kuramoto [3] el estado de cada nodo se describe mediante una fase escalar, i.e. $\mathbf{x}_i = \theta_i$, que varía entre $(0, 2\pi]$. La dinámica local está dada por una constante $\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) = \omega_i$, la frecuencia natural, que es una variable aleatoria que sigue una cierta distribución, en nuestro caso uniforme: $g(\omega) \sim \mathcal{U}[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Las funciones de acoplo son de la forma $\mathbf{g}^{(1)} = \frac{1}{\langle k^{(1)} \rangle} \sin(\theta_j - \theta_i)$ y $\mathbf{g}^{(2)} = \frac{1}{\langle k^{(2)} \rangle} \sin(\theta_j + \theta_k - 2\theta_i)$. Por lo tanto, la dinámica de Kuramoto con interacciones de órdenes 1 y 2 [2] viene descrita por:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_i = & \omega_i + \frac{\sigma^{(1)}}{\langle k^{(1)} \rangle} \sum_{j=1}^N a_{ij}^{(1)} \sin(\theta_j - \theta_i) + \\ & + \frac{1}{2!} \frac{\sigma^{(2)}}{\langle k^{(2)} \rangle} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_{ijk}^{(2)} \sin(\theta_j + \theta_k - 2\theta_i) \end{aligned} \quad (11)$$

Para monitorizar la el grado de sincronización del sistema se introduce el siguiente parámetro de orden:

$$r(t)e^{i\Psi(t)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j(t)}, \quad (12)$$

donde Ψ es la fase media de la dinámica colectiva del sistema. El valor absoluto del módulo toma el valor $r \equiv |r| = 1$ cuando el sistema está completamente sincronizado y $r \equiv |r| = 0$ en una situación de incoherencia. En la Figura 5 se pueden ver las evoluciones temporales de un sistema bajo las ecuaciones de este modelo, partiendo de un estado de las fases aleatorio, en una red aleatoria de 20 nodos con $\langle k^{(1)} \rangle = 5$ y sin interacciones de alto orden. En el panel (a) de la Figura 5 se tiene un bajo acoplo ($\sigma^{(1)} = 0.2$) que da lugar a un estado incoherente con $r = 0.27$, y en el (b) al tener un acoplo mayor ($\sigma^{(1)} = 2.0$) se observa cómo se llega a un estado estacionario sincronizado con $r = 0.98$. En este caso no se han tenido en cuenta las interacciones de alto orden, por lo que $\sigma^{(2)} = 0$.

El parámetro r cuantifica el grado de sincronización del sistema en su conjunto, pero para tener una mayor idea de los mecanismos microscópicos tras la transición de fase, podemos introducir

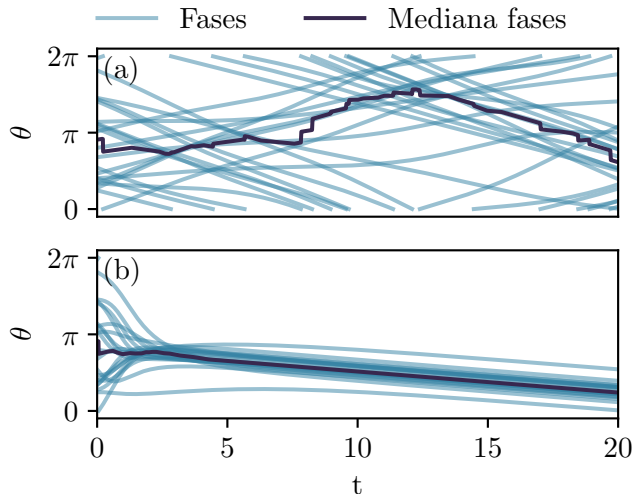


Figura 5: **Modelo Kuramoto.** Evolución temporal de 20 fases siguiendo una dinámica del modelo Kuramoto en una red aleatoria de grado medio $\langle k^{(1)} \rangle = 5$ con $\sigma^{(1)} = 0.2$ en el panel (a) y $\sigma^{(1)} = 2.0$ en el (b). En ambos, $\sigma^{(2)} = 0$.

un parámetro que dé cuenta del grado de sincronización local, definido de la siguiente manera:

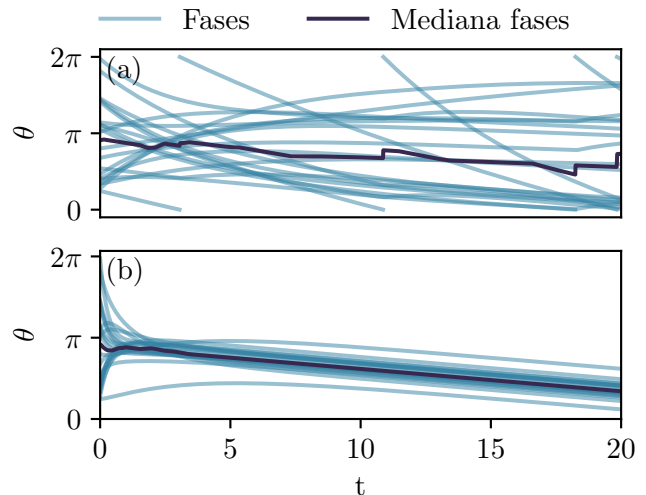
$$\langle r_{loc} \rangle = \frac{1}{\sum_{i=1} \left(\sum_{j=1} a_{ij}^{(1)} + \frac{1}{2!} \sum_{j=1} \sum_{k=1} a_{ijk}^{(2)} \right)} \cdot \sum_{i=1} \left(\sum_{j=1} \left| \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{a_{ij}^{(1)}}{\Delta t} \int_{t_r}^{t_r + \Delta t} e^{i[\theta_j(t) - \theta_i(t)]} dt \right| + \frac{1}{2!} \sum_{j=1} \sum_{k=1} \left| \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{a_{ijk}^{(2)}}{\Delta t} \int_{t_r}^{t_r + \Delta t} e^{i[\theta_j(t) + \theta_k(t) - 2\theta_i(t)]} dt \right| \right). \quad (13)$$

Este parámetro indica el grado de coherencia entre las fases que están conectadas, ya sea mediante aristas o hiperaristas. Si $r_{loc} = 1$ el sistema está sincronizado a nivel local, mientras que $r_{loc} = 0$ se corresponde con una evolución incoherente localmente. En el previo ejemplo de la Figura 5(a) con $\sigma^{(1)} = 0.2$ se tiene un estado incoherente a nivel local con $r_{loc} = 0.11$ y en (b) con $\sigma^{(1)} = 2.0$ el sistema está sincronizado localmente con $r_{loc} = 0.94$.

2.2.2. Dinámica de consenso

La versión linealizada del modelo Kuramoto, es decir, con las funciones de acoplo siendo $\mathbf{g}^{(1)} = \frac{1}{\langle k^{(1)} \rangle} (\theta_j - \theta_i)$ y $\mathbf{g}^{(2)} = \frac{1}{\langle k^{(2)} \rangle} (\theta_j + \theta_k - 2\theta_i)$, es análoga a una dinámica de consenso[5, 6], cuyas ecuaciones son:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_i = & \omega_i + \frac{\sigma^{(1)}}{\langle k^{(1)} \rangle} \sum_{j=1}^N a_{ij}^{(1)} (\theta_j - \theta_i) + \\ & + \frac{1}{2!} \frac{\sigma^{(2)}}{\langle k^{(2)} \rangle} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_{ijk}^{(2)} (\theta_j + \theta_k - 2\theta_i) \end{aligned} \quad (14)$$



Podemos usar los mismos parámetros de orden para monitorizar este sistema puesto que no deja de tratarse de la evolución de fases con características similares a las del modelo Kuramoto. La evolución temporal de las fases, mostradas en la Figura 6, son para una red aleatoria con 20 nodos y grado medio $\langle k^{(1)} \rangle = 5$, sin interacciones de alto orden ($\sigma^{(2)} = 0$). El panel (a) de la Figura 6 se corresponde con un bajo acoplo ($\sigma^{(1)} = 0.2$) teniendo un estado incoherente ($r = 0.26$, $r_{loc} = 0.14$) y en el (b) hay un acoplo mayor ($\sigma^{(1)} = 2.0$) que lleva a un estado estacionario sincronizado ($r = 0.98$, $r_{loc} = 0.94$).

2.2.3. Modelo de células marcapasos

Los latidos del corazón son consecuencia de la contracción muscular del tejido cardíaco de manera periódica. Las células marcapasos (*pacemakers*) son las responsables de emitir los impulsos eléctricos que provocan estas contracciones. Se puede modelizar el comportamiento de estas células con un modelo de dos variables[11], es decir, $\mathbf{x}_i = (v_i, h_i)$. En este modelo v

representa el potencial de membrana o voltaje y h las concentraciones iónicas. La dinámica local viene descrita por $f(v_i, h_i)$ para v y por $g(v_i, h_i)$ para h , definidas como

$$\begin{aligned} f(v_i, h_i) &= \frac{1}{\tau_i} \left(\frac{h_i(v_i + a)^2(1 - v_i)}{\tau_{in}} - \frac{v_i}{\tau_{out}} \right), \\ g(v_i, h_i) &= \frac{1}{\tau_i} \left(\frac{1}{\tau_{close}} + \frac{\tau_{close} - \tau_{open}}{\tau_{close}\tau_{open}} h_\infty(v_i) \right), \end{aligned} \quad (15)$$

donde $a, \lambda, \tau_{in}, \tau_{out}, I_{stim}, \tau_{open}$ y τ_{close} son constantes, τ_i una variable aleatoria que sigue una distribución uniforme y la función $h_\infty(v_i)$ está definida como

$$h_\infty(v_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \tanh(\frac{v_i - v_{gate}}{\eta_{gate}})) & \text{si } \eta_{gate} \neq 0, \\ \frac{1}{2}(1 - \text{sgn}(v_i - v_{gate})) & \text{si } \eta_{gate} = 0. \end{cases}$$

donde v_{gate} y η_{gate} son constantes y sgn denota la función signo. Los valores de todas las variables se encuentran en la Tabla 2 del Apéndice B. En este trabajo, las funciones de acoplo escogidas son análogas a las del modelo Kuramoto introducido en la Sección 2.2.1, aunque originalmente el modelo de Djabella et al. [11] considera únicamente interacciones a pares y usa las funciones de acoplo de una dinámica de consenso (Sección 2.2.2). La razón del cambio es la necesidad de introducir una no-linealidad en las funciones de acoplo (mas detalles en la Subsección 3.2). En cualquier caso para todas las gráficas que se muestren haciendo uso de este modelo existirá una versión equivalente con las funciones de acoplo lineales en el Apéndice D. De esta manera, las ecuaciones del modelo quedan como:

$$\begin{aligned} \dot{v}_i &= f(v_i, h_i) + \sigma_v^{(1)} \sum_{j=1}^N a_{ij}^{(1)} \sin(v_j - v_i) + \frac{1}{2!} \sigma_v^{(2)} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_{ijk}^{(2)} \sin(v_j + v_k - 2v_i) \\ \dot{h}_i &= g(v_i, h_i) + \sigma_h^{(1)} \sum_{j=1}^N a_{ij}^{(1)} \sin(h_j - h_i) + \frac{1}{2!} \sigma_h^{(2)} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_{ijk}^{(2)} \sin(h_j + h_k - 2h_i) \end{aligned} \quad (16)$$

En la Figura 7 podemos ver la evolución temporal de las variables v y h de 100 nodos bajo esta dinámica en un estado incoherente en los paneles (a) y (b) y uno sincronizado en (c) y (d). Para ello, se ha usado una red aleatoria únicamente con interacciones a pares, es decir $\sigma_v^{(2)} = \sigma_h^{(2)} = 0$, y manteniendo la relación $\sigma_h^{(1)} = \frac{1}{2}\sigma_v^{(1)}$ entre los acoplos según Djabella et al. [11]. De manera cualitativa, puede verse cómo en el caso sincronizado, al evolucionar los nodos de manera síncrona, la mediana del voltaje adquiere la forma de la evolución de un único nodo.

Para caracterizar de manera cuantitativa el grado de sincronización entre las distintas células, consideremos la desviación estándar de una variable de estado x en un instante temporal t_i

$$E(x(t_i)) = \left(\frac{1}{N} \sum_{j=0}^N (x_j(t_i) - \bar{x}(t_i))^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (17)$$

donde $\bar{x}(t_i)$ denota el valor medio de los estados de los nodos en el instante t_i . Se toma entonces como parámetro de orden la media de los errores $\langle E(x) \rangle$ sobre todos los instantes temporales de

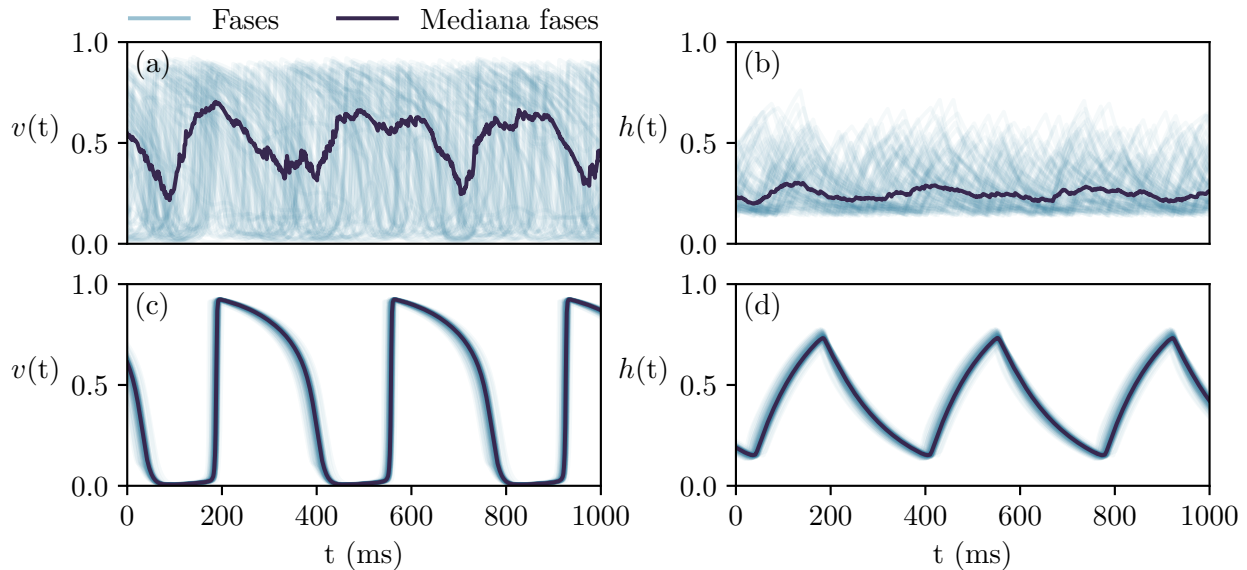


Figura 7: **Modelo de células marcapasos.** Evolución temporal del voltaje v de 100 nodos (sombreado azul) siguiendo una dinámica del modelo de células marcapasos y la mediana de la evolución temporal (en oscuro) para dos valores de los acoplos, con $\sigma_h^{(1)} = \frac{1}{2}\sigma_v^{(1)}$ y sin interacciones de alto orden $\sigma_v^{(2)} = \sigma_h^{(2)} = 0$, en una red aleatoria con $\langle k^{(1)} \rangle = 5$. Los valores del acoplo son, en los paneles (a) y (b) $\sigma_v^{(1)} = 0.0025$ y $\sigma_h^{(1)} = 0.00125$ y en los paneles (c) y (d) $\sigma_v^{(1)} = 0.03$ y $\sigma_h^{(1)} = 0.015$.

la evolución del sistema una vez alcanzado el estado estacionario en el instante t_r :

$$\langle E(x) \rangle = \frac{1}{T} \sum_{t_i=t_r}^{t_r+T} E(x(t_i)), \quad (18)$$

donde T denota el intervalo temporal en el que se toma en cuenta la evolución de las variables para el cálculo del parámetro de orden y t_r el instante temporal en el que se empieza a contar, entendido como un tiempo de termalización del sistema. Este error se puede calcular tanto para v como h como parámetro de orden del sistema. En la Figura 7(a), el error del voltaje es $\langle E(v) \rangle = 0.29$, mientras que el del estado sincronizado representado en la Figura 7(b) toma el valor $\langle E(v) \rangle = 0.03$. Para este ejemplo no se ha tomado tiempo de termalización $t_r = 0$ y el intervalo temporal es el mostrado $T = 1000$ ms.

2.2.4. Neuronas de Izhikevich

Los modelos de neuronas biológicas se centran en describir los patrones de las respuestas eléctricas de las neuronas. El modelo Izhikevich[13, 14] lo hace en función de dos variables: el potencial de membrana o voltaje (v), que representa la diferencia de potencial eléctrico entre el interior y el exterior de la célula; y la corriente inhibitoria (h), que da cuenta de la activación de corrientes iónicas de K^+ y la inactivación de corrientes iónicas de Na^+ , y funciona como realimentación negativa para la variable v . Por tanto, en este modelo $\mathbf{x}_i = (v_i, h_i)$. La dinámica local de ambas variables viene descrita por:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{v}_i) &= a(v_i - v^r)(v_i - v^t) - h_i + \xi_i, \\ \mathbf{f}(\mathbf{h}_i) &= b(v_i - v^r) - h_i, \end{aligned} \quad (19)$$

donde a, b, v^r y v^t son constantes. ξ_i representa una contribución del ruido ambiental característico de los sistemas biológicos, y tiene en cuenta dos fuentes posibles [14]. Por una parte, las fluctuaciones en las neuronas aferentes (a través de las cuales las neuronas reciben sus *inputs*), que pueden ser modeladas como una media gaussiana positiva centrada en 0 y de varianza g_W^2 . Por otra, la liberación espontánea de neurotransmisores en terminales presinápticas que induce pequeñas corrientes en la corriente post-sináptica, lo cual se modeliza como impulsos de frecuencia característica λ y magnitud g_S .

Los términos de acoplo representan la corriente que recibe la neurona a través de las sinapsis con otras neuronas, por lo que incluyen solo la variable v y son de la forma $\mathbf{g}^{(1)} = \Theta(v_j - v^t)$ y $\mathbf{g}^{(2)} = \Theta(v_j + v_k - 2v^t)$. Aquí, $\Theta(x)$ denota la función escalón. Es decir, que si el potencial de membrana de una cierta neurona j que está conectada a la neurona i es mayor a un umbral v^t , entonces aparece una corriente entre éstas con una intensidad proporcional al acoplo $\sigma^{(1)}$, y análogamente si la suma de los potenciales de membrana de dos neuronas j y k a las que está conectada la neurona i mediante una hiperarista supera el umbral $2v^t$, entonces se da una interacción proporcional a $\sigma^{(2)}$.

Finalmente, cuando el potencial de membrana sobrepasa cierto valor p , ambas variables son reseteadas de manera que v_i pasa a valer una constante c y a h_i se le suma un valor d . De esta manera, la descripción completa del modelo es:

$$\begin{aligned} \dot{v}_i &= a(v_i - v^r)(v_i - v^t) - h_i + \xi_i + \sigma^{(1)} \sum_{j=1}^N a_{ji}^{(1)} \Theta(v_j - v^t) + \\ &+ \frac{1}{2!} \sigma^{(2)} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_{ijk}^{(2)} \Theta(v_j + v_k - 2v^t) \\ \dot{h}_i &= b(v_i - v^r) - h_i \\ v_i \geq p &\rightarrow \begin{cases} v_i \leftarrow c, \\ h_i \leftarrow h_i + d \end{cases} \end{aligned} \quad (20)$$

La virtud de este modelo es la capacidad de reproducir los patrones de impulsos eléctricos que emiten distintos tipos de neuronas excitatorias e inhibitorias en función de las constantes a, b, c, d . Los valores usados de las constantes del modelo se encuentran en la Tabla 3 del Apéndice B.

En la Figura 8 se puede ver la evolución temporal de las variables v y h de un sistema en estado incoherente en los paneles (a) y (b) respectivamente, y en estado sincronizado en los paneles (c) y (d), en una red aleatoria de 100 nodos y $\langle k^{(1)} \rangle = 5$, sin interacciones de alto orden. Tomando como parámetro de orden el error definido en la Ecuación 18, tenemos que para los paneles (a) y (b) el error de las variables de estado son $\langle E(v) \rangle = 0.67$ y $\langle E(h) \rangle = 0.87$, y para los paneles (c) y (d) son $\langle E(v) \rangle = 0.37$ y $\langle E(h) \rangle = 0.40$, donde no se ha tomado tiempo de termalización $t_r = 0$ y el intervalo temporal es el mostrado $T = 10$ (u.a.).

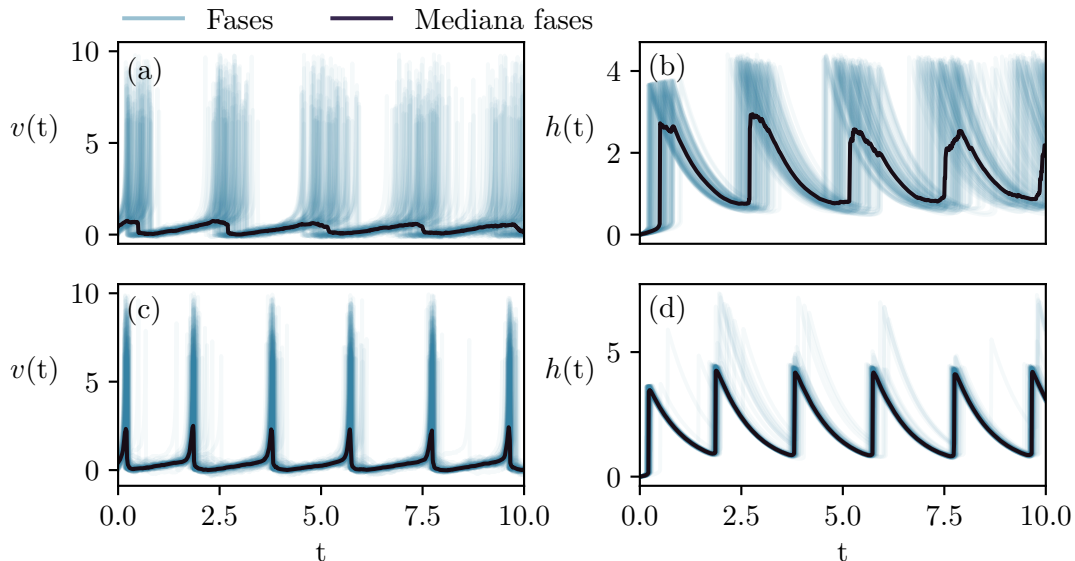


Figura 8: **Modelo Izhikevich.** Evolución temporal de las variables del modelo Izhikevich en una red aleatoria con 100 nodos (sombreado) y la mediana de la evolución temporal (oscuro), con $\langle k^{(1)} \rangle = 5$ y sin interacciones de alto orden $\sigma^{(2)} = 0$. Los paneles (a) y (b) se corresponden con un valor del acoplo $\sigma^{(1)} = 0$ y los (c) y (d) con $\sigma^{(1)} = 1$.

3. Transición explosiva por acoplo estructura-dinámica

3.1. Interacciones de alto orden como ruta natural hacia la explosividad

En el modelo Kuramoto tradicional (en ausencia de interacciones de alto orden), al computar el parámetro de orden de sincronización global r conforme se aumenta el valor del acoplo de las interacciones de primer orden, $\sigma^{(1)}$, se observa una transición de fase entre el estado incoherente y el sincronizado. En la Figura 9, la línea correspondiente a $\sigma^{(2)} = 0$ muestra como esta transición de fase es de segundo orden. No obstante, cuando se introducen interacciones de alto orden, la transición ocurre tal y como se muestra en la misma Figura 9 con la línea correspondiente a $\sigma^{(2)} = 1$. Se observa que la transición cambia de naturaleza, pasando a ser una transición de primer orden (denominada como explosiva, al venir ocasionada por la estructura de interacciones). Ambas simulaciones se han realizado en una red aleatoria de 1000 nodos con $\langle k^{(1)} \rangle = \langle k^{(2)} \rangle = 5$, realizando incrementos adiabáticos sobre el acoplo $\sigma^{(1)}$ una vez alcanzado el estado estacionario (simulación adiabática “forwards”).

La Figura 9 muestra claramente como, en el modelo Kuramoto, la inclusión de las interacciones de alto orden lleva a un cambio en la naturaleza de la transición de orden. Las transiciones de primer orden tienen una zona de biestabilidad asociada. Si además de la simulación “forwards” se realiza la simulación “backwards”, es decir, empezando en el estado sincronizado y realizando disminuciones adiabáticas, se logra capturar el ciclo de histéresis que delimita dicha zona de biestabilidad. Una versión de la Figura 9 incluyendo tanto las trayectorias “backwards” como las “forwards” puede encontrarse en el Apéndice C.

Para entender mejor el cambio en la dinámica emergente del modelo Kuramoto por la inclusión de interacciones de alto orden, podemos hacer un análisis de estabilidad de las ecuaciones del modelo Kuramoto. Para ello, siguiendo el procedimiento aplicado por Skardal y Arenas[8], consideramos primero la siguiente generalización del modelo de Kuramoto, donde los nodos

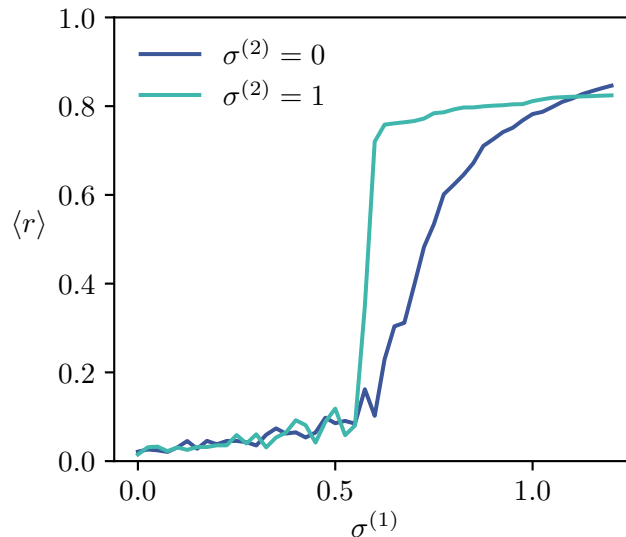


Figura 9: **Sincronización del modelo Kuramoto en estructura aleatoria.** Sistema con ($\sigma^{(2)} = 1$) y sin ($\sigma^{(2)} = 0$) interacciones de alto orden, en un red aleatoria de 1000 nodos con $\langle k^{(1)} \rangle = \langle k^{(2)} \rangle = 5$, realizando una simulación adiabática “forwards”.

interaccionan todos con todos, a modo de aproximación de campo medio:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{\sigma^{(1)}}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) + \frac{1}{2!} \frac{\sigma^{(2)}}{N^2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sin(2\theta_j - \theta_k - \theta_i) \quad (21)$$

Esta generalización tiene una función de acoplo de alto orden ligeramente distinta, pero el comportamiento del sistema es el mismo[8, 26]. Este sistema se puede tratar usando la reducción de dimensionalidad de Ott y Antonsen[10]. Usando el parámetro de orden ya introducido $z = r e^{i\Psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j}$ y $z_2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i2\theta_j}$ podemos expresar la Ecuación 21 como:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{1}{2i} (H e^{-i\theta_i} - H^* e^{i\theta_i}) \quad (22)$$

donde $H = \sigma^{(1)}z + \sigma^{(2)}z_2z^*$, siendo * el complejo conjugado. En el límite termodinámico en el que el número de osciladores $N \rightarrow \infty$, en el modelo Kuramoto se expresa el estado del sistema con una función de densidad de osciladores $f(\theta, \omega, t)$, donde $f(\theta, \omega, t)d\theta d\omega$ representa la fracción de osciladores con fase en el intervalo $[\theta, \theta + d\theta]$ y frecuencia en $[\omega, \omega + d\omega]$ en el instante t . Dado que el número de osciladores se conserva y las frecuencias son constantes, f satisface la siguiente ecuación de continuidad:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ f \left[\omega_i + \frac{1}{2i} (H e^{-i\theta_i} - H^* e^{i\theta_i}) \right] \right\} \quad (23)$$

Si expandimos la función de densidad f en su serie de Fourier:

$$f(\theta, \omega, t) = \frac{g(\omega)}{2\pi} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n(\omega, t) e^{in\theta} + \text{c.c.} \right] \quad (24)$$

donde c.c. indica el complejo conjugado del término anterior, siguiendo la hipótesis de Ott y Antonsen[10] de que los coeficientes de Fourier decaen exponencialmente, es decir $\hat{f}_n(\omega, t) = \alpha^n(\omega, t)$ para cierta función α analítica en el plano complejo ω , al introducir este planteamiento

en f en la Ecuación 23, la ecuación se reduce a la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{\alpha} = -i\omega\alpha + \frac{1}{2}(H^* - H\alpha^2) \quad (25)$$

Además, en el límite termodinámico se tiene que $z^* = \int \int f(\theta, \omega, t) e^{i\theta} d\theta d\omega = \int \alpha(\omega, t) g(\omega) d\omega$. Si g es una Lorentziana con media ω_0 y anchura Δ , es decir $g(\omega) = \Delta/\pi[\Delta^2 + (\omega - \omega_0)^2]$, esta integral puede ser evaluada en el plano complejo usando el teorema integral de Cauchy, dando $z^* = \alpha(\omega_0 - i\Delta, t)$ (análogamente, se tiene que $z_2^* = \alpha^2(\omega_0 - i\Delta, t) = z^{*2}$). Evaluando la Ecuación 25 en $\omega = \omega_0 - i\Delta$ y tomando el complejo conjugado se obtiene:

$$\dot{z} = -\Delta z + i\omega_0 z + \frac{1}{2} \left[(\sigma^{(1)} z + \sigma^{(2)} z^2 z^*) - (\sigma^{(1)} z^* + \sigma^{(2)} z^{*2} z) z^2 \right] \quad (26)$$

Reescalando el tiempo $\hat{t} = \delta t$ y los acoplos $\hat{\sigma}^{(1)} = \sigma^{(1)}/\Delta$ y $\hat{\sigma}^{(2)} = \sigma^{(2)}/\Delta$ y separando la Ecuación 26 en la evolución temporal para r y Ψ , tras dejar la notación de las variables reescaladas con Λ , tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -r + \frac{\sigma^{(1)}}{2} r(1 - r^2) + \frac{\sigma^{(2)}}{2} r^3(1 - r^2) \\ \dot{\Psi} &= \omega_0 \end{aligned} \quad (27)$$

Vemos que la amplitud y la fase del parámetro de orden se pueden expresar de manera desacoplada y la fase evoluciona con una velocidad angular constante. Por lo tanto, bajo el sistema de referencia apropiado podremos considerar $\Psi = 0$. Además, el término correspondiente a las interacciones de alto orden va con términos al cubo y a la quinta. Esto implica que la estabilidad del estado incoherente, dado por $r = 0$, el cual es siempre un punto de equilibrio, no es afectado por las interacciones de alto orden. No obstante, estos términos no lineales que emergen de las interacciones de alto orden dan pie a la existencia de estados sincronizados. En particular, uno o dos estados sincronizados también existen en el estado estacionario ($\dot{r} = 0$), dados por:

$$r = \sqrt{\frac{\sigma^{(2)} - \sigma^{(1)} \pm \sqrt{(\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)})^2 - 8\sigma^{(2)}}}{2\sigma^{(2)}}} \quad (28)$$

donde las soluciones con signo más y menos se corresponden con las soluciones estable e inestable cuando éstas existen. El análisis de esta ecuación revela que, para valores del acoplo de alto orden menores que 2, existen una fase incoherente y otra sincronizada donde la solución es única en función del acoplo de primer orden. En cambio, para valores mayores a 2, aparece una bifurcación que da lugar a una zona de biestabilidad, donde ambas soluciones, incoherente y sincronizada, coexisten[8]. En el Apéndice G se puede visualizar el diagrama de estabilidad correspondiente a este análisis.

Recientemente, Battiston et al. postularon en su artículo de perspectiva en Nature Physics [7] que las interacciones de alto orden son una aparente ruta natural hacia la explosividad en transiciones de fase, con interacciones de alto orden “fuertes” dando lugar a transiciones de primer orden en dinámicas de sincronización y contagio, e interacciones de alto orden “débiles” presentando el mismo comportamiento cualitativo que los sistemas dinámicos con interacciones a pares. En el resto de esta sección planteamos la pregunta de si la presencia de interacciones de alto orden “fuertes” es una condición suficiente para provocar transiciones explosivas en

dinámicas de sincronización. Para indagar en esta cuestión, primero consideramos la influencia de la forma funcional de la dinámica de la red, a continuación la influencia de la estructura de la misma, y finalmente la influencia de la (falta de) estabilidad del estado sincronizado.

3.2. Influencia de la forma funcional

Como primer acercamiento, podemos ver el comportamiento de la dinámica de consenso, la versión linealizada del modelo Kuramoto, ante la introducción de interacciones de alto orden. Para comparar ambos comportamientos, hacemos una simulación de ambos sistemas dinámicos en una estructura con las mismas características que en la Subsección 3.1, incluyendo interacciones de alto orden, mostrado en la Figura 10(a), donde la curva correspondiente al modelo Kuramoto es la misma mostrada en la Figura 9 de la Subsección 3.1. Vemos cómo la inclusión de interacciones de alto orden no provoca en la dinámica de consenso una transición explosiva, sino que actúa simplemente aumentando la magnitud de la sincronización global. Es más, para $\sigma^{(2)} = 1$, la dinámica de consenso siempre está en fase sincronizada ($\langle r \rangle \rightarrow 1$).

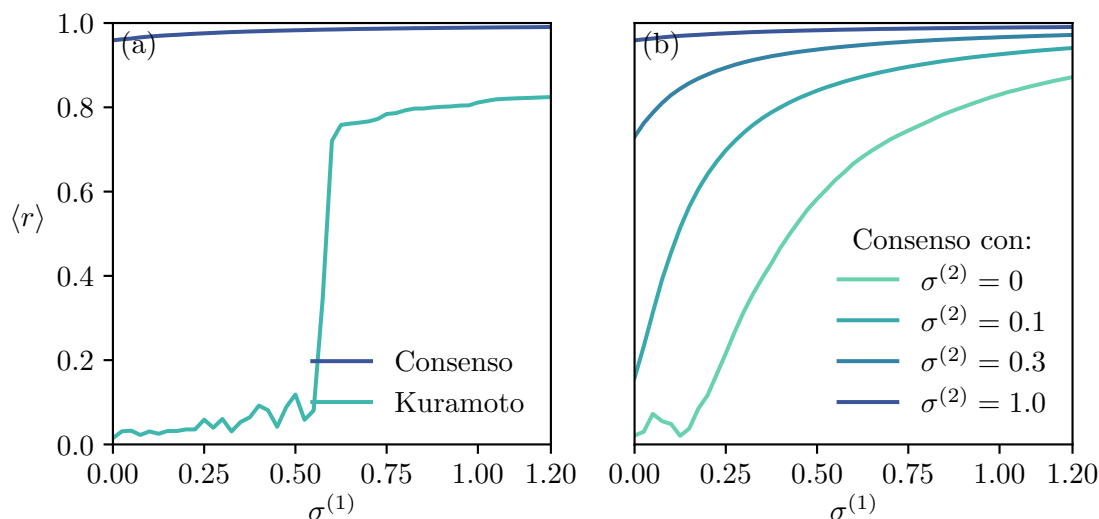


Figura 10: **Sincronización del modelo Kuramoto y de la dinámica de consenso en estructura aleatoria con interacciones de alto orden.** En el panel (a), diagrama de sincronización del modelo de Kuramoto y la dinámica de consenso en una red aleatoria de 1000 nodos con $\langle k^{(1)} \rangle = \langle k^{(2)} \rangle = 5$, con interacciones de alto orden $\sigma^{(2)} = 1.0$. En el (b), dinámica de consenso con valores crecientes del acoplo de alto orden $\sigma^{(2)}$.

Para comprobar cómo es la naturaleza de la transición, en la Figura 10(b) se muestra la transición de orden de la dinámica de consenso conforme aumenta el acoplo de alto orden $\sigma^{(2)}$, para una estructura de las mismas características, es decir, de 1000 nodos y $\langle k^{(1)} \rangle = \langle k^{(2)} \rangle = 5$. Se aprecia que la inclusión de interacciones de alto orden no provoca en la dinámica de consenso una transición explosiva, sino que actúa simplemente aumentando de manera suave la magnitud de la sincronización global.

Podemos entender este comportamiento a partir de la ecuación diferencial que define la dinámica de consenso. A partir de la Eq. (14), las funciones de acoplo se pueden reescribir con una formulación alternativa en función de la matriz laplaciana. Para la función de acoplo de

orden $m = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\langle k^{(1)} \rangle} \sum_{j=1}^N a_{ij}^{(1)} (\theta_j - \theta_i) &= \frac{1}{\langle k^{(1)} \rangle} \left(\sum_{j=1}^N a_{ij}^{(1)} \theta_j - \sum_{j=1}^N a_{ij}^{(1)} \theta_i \right) = \frac{1}{\langle k^{(1)} \rangle} \left(\sum_{j=1}^N a_{ij}^{(1)} \theta_j - k_i^{(1)} \theta_i \right) \\ &= \frac{1}{\langle k^{(1)} \rangle} \sum_{j=1}^N (a_{ij}^{(1)} - \delta_{ij} k_j^{(1)}) \theta_j = -\frac{1}{\langle k^{(1)} \rangle} \sum_{j=1}^N \ell_{ij}^{(1)} \theta_j. \end{aligned} \quad (29)$$

En cuanto a la función de acoplo de orden $m = 2$, si consideramos la simetría de las hiperaristas de orden $m = 2$ del tensor de adyacencia $a_{ijk}^{(2)} = a_{ikj}^{(2)}$, e introducimos la matriz de interacción generalizada $\mathbf{B}^{(2)}$, podemos expresar esta contribución en términos de la matriz laplaciana generalizada como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2!} \frac{1}{\langle k^{(2)} \rangle} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_{ijk}^{(2)} (\theta_j + \theta_k - 2\theta_i) &= \frac{1}{\langle k^{(2)} \rangle} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_{ijk}^{(2)} (\theta_j - \theta_i) \\ &= \frac{1}{\langle k^{(2)} \rangle} \sum_{j=1}^N [b_{ij}^{(2)} - 2k_i^{(2)} \delta_{ij}] \theta_j = -\frac{1}{\langle k^{(2)} \rangle} \sum_{j=1}^N \ell_{ij}^{(2)} \theta_j \end{aligned} \quad (30)$$

De esta manera, podemos expresar las ecuaciones de la dinámica de consenso mostradas en la Ecuación 14 como:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - \frac{\sigma^{(1)}}{\langle k^{(1)} \rangle} \sum_{j=1}^N \ell_{ij}^{(1)} \theta_j - \frac{\sigma^{(2)}}{\langle k^{(2)} \rangle} \sum_{j=1}^N \ell_{ij}^{(2)} \theta_j = \omega_i - \sum_{j=1}^N \bar{\ell}_{ij} \theta_j \quad (31)$$

donde $\bar{\ell}$ es el laplaciano efectivo $\bar{\ell}_{ij} = \frac{\sigma^{(1)}}{\langle k^{(1)} \rangle} \ell_{ij}^{(1)} + \frac{\sigma^{(2)}}{\langle k^{(2)} \rangle} \ell_{ij}^{(2)}$. Así, hemos obtenido una forma funcional equivalente a las que tendría la dinámica de consenso sin interacciones de alto orden. Es decir, que las interacciones de alto orden se pueden descomponer como combinación de interacciones de primer orden, implicando que, de manera efectiva, las interacciones de alto orden en este modelo están operando como un aumento en la magnitud del acoplo de la estructura, pero no añadiendo ninguna fenomenología extra. Es importante notar que en las ecuaciones del modelo Kuramoto, al tener la función no-lineal *seno* en las funciones de acoplo, este desarrollo no puede realizarse y las interacciones de alto orden no pueden expresarse como combinación lineal de las de orden 1. Esto es lo que permite que las interacciones de alto orden en el modelo Kuramoto sí introduzcan un cambio en la naturaleza de la transición de orden, pero no en la dinámica de consenso. Desde un punto de vista más general, podemos afirmar que para que las interacciones de alto orden induzcan un cambio cualitativo en el comportamiento colectivo de un sistema dinámico, la forma funcional del término de interacción ha de ser no-lineal.

3.3. Influencia de la estructura

Otro enfoque para comprobar hasta qué punto es general que las interacciones de alto orden induzcan transiciones explosivas es considerar cambios en la estructura de la red, ya que hasta ahora solo se han considerado estructuras aleatorias. Para ello, en esta sección se ve a utilizar el modelo introducido en la subsección 2.1.1. Es decir, con una red geométrica de interacciones a pares como base, interpolamos entre estructuras con interacciones a tres cuerpos con restricción geométrica y estructuras con interacciones a tres cuerpos aleatorias. El objetivo es ver el efecto

de la estructura en la naturaleza de la transición de fase del modelo Kuramoto.

En la Figura 11 se muestra el diagrama de sincronización para estructuras con r_1 fijo y distintos r_2 , con respecto al parámetro de orden de sincronización global en el panel (a) y el local en el (b). En todas las simulaciones se han fijado las mismas condiciones iniciales, habiéndose realizado sobre una red espacial generalizada a alto orden de 500 nodos, de grado medio $\langle k^{(1)} \rangle = \langle k^{(2)} \rangle = 5$, dejando el acoplo de alto orden fijo $\sigma^{(2)} = 1.0$ y la estructura de orden 1 con $r_1 = 0.06$.

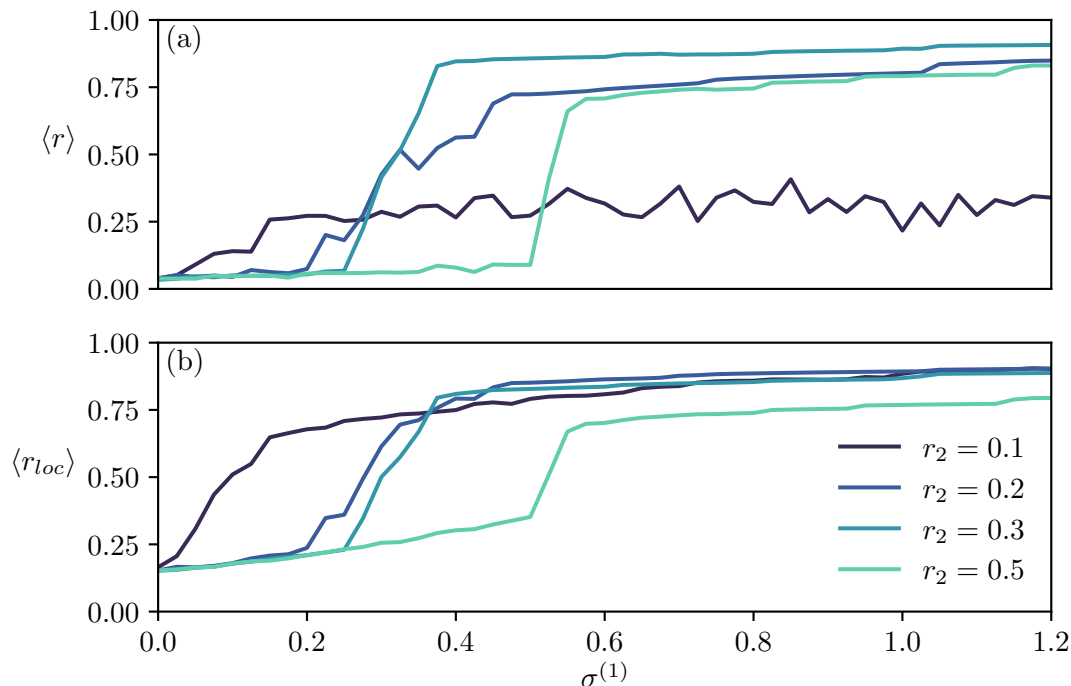


Figura 11: **Sincronización del modelo Kuramoto al variar el radio de una estructura geométrica.** Diagrama de sincronización con respecto al parámetro de orden global r en el panel (a) y al parámetro de orden local r_{loc} en (b) del modelo Kuramoto en una red geométrica generalizada a alto orden de 500 nodos con $\langle k^{(1)} \rangle = \langle k^{(2)} \rangle = 5$, $\sigma^{(2)} = 1.0$ y $r_1 = 0.06$, variando r_2 . El *intra-order hyperedge overlap* de cada estructura es, en orden creciente del valor del radio: $\mathcal{T}^{(2)} = 0.44, 0.15, 0.07, 0.03$.

Conforme aumenta el radio de alto orden manteniendo el grado medio fijo, la estructura se asemeja progresivamente a una estructura aleatoria, llegando a que en el límite en que el r_2 permitiera conectar dos nodos cualesquiera, ambas estructuras serían equivalentes. Por esta razón la transición se hace explosiva más marcadamente para los radios de mayor valor. Es decir, aumentar el radio de alto orden nos mueve de situaciones con transiciones suaves a situaciones con transiciones explosivas hacia el estado sincronizado. Además, es notable cómo para radios r_2 bajos, el *intra-order hyperedge overlap* $\mathcal{T}^{(2)}$ es alto. Esto implica que las interacciones de alto orden refuerzan los entornos locales definidos por la estructura de interacción a pares. Malizia et al. [2] muestran que las estructuras de alto orden con alto *intra-order hyperedge overlap* no presentan transiciones explosivas. Por tanto, los resultados aquí presentados confirman su tesis de que la organización microscópica de las interacciones de alto orden afecta a la naturaleza de la transición de sincronización.

La restricción geométrica hace que la dinámica del entorno local de los nodos se refuerce. Esto se ejemplifica en la Figura. 19.(b), que muestra el parámetro de orden de sincronización

local. Se aprecia que, para radios bajos, la sincronización local es mucho mayor que la global. Es representativo el caso de $r_2 = 0.1$, en el que no se llega a un estado global sincronizado para el rango de valores de $\sigma^{(1)}$ mostrados, pero el parámetro de orden local $\langle r_{loc} \rangle > 0.6$ a partir de $\sigma^{(1)} \approx 0.2$. En contraposición, en la Figura 12 estudiamos el estado sincronizado para el caso en que el radio es suficientemente alto o $\mathcal{T}^{(2)}$ suficientemente bajo como para provocar una transición explosiva. Tomando $r_2 = 0.5$ con $\mathcal{T}^{(2)} = 0.03$, en la Figura 12(a) y (b) se pueden ver las distintas curvas, que se corresponden con valores de $\sigma^{(2)}$ desde 0 hasta 2. Las realizaciones se han hecho sobre una red geométrica de 500 nodos con $\langle k^{(1)} \rangle = \langle k^{(2)} \rangle = 5$ y $r_1 = 0.06$, realizando incrementos adiabáticos sobre $\sigma^{(1)}$.

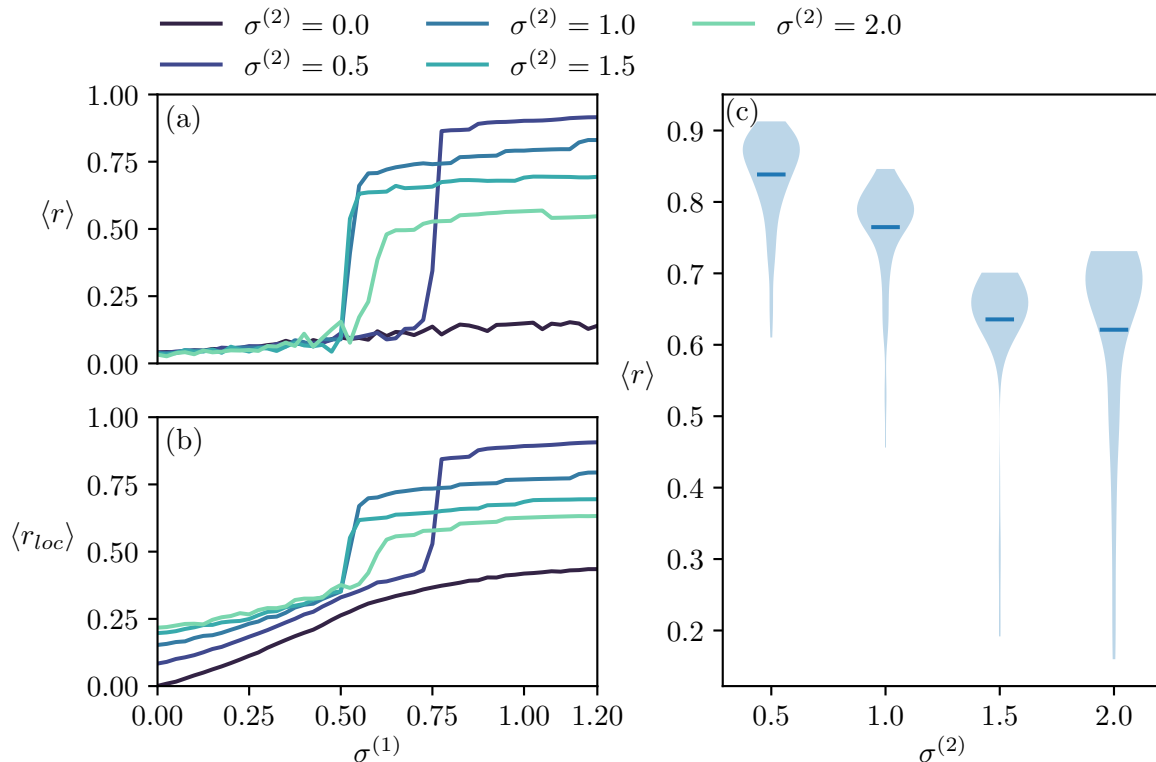


Figura 12: **Sincronización del modelo Kuramoto al variar el acoplo de alto orden en una estructura geométrica y distribución de valores de r .** En los paneles (a) y (b), diagrama de sincronización del modelo Kuramoto con respecto a los parámetros de orden global y local respectivamente en los paneles (a) y (b) en una red geométrica generalizada a alto orden de 500 nodos con $\langle k^{(1)} \rangle = \langle k^{(2)} \rangle = 5$, $r_1 = 0.06$, $r_2 = 0.5$ y $\mathcal{T}^{(2)} = 0.03$, variando el acoplo de alto orden $\sigma^{(2)}$. En el panel (c), distribución de valores de r en el estado estacionario para 100 condiciones iniciales distintas con distintos valores del acoplo de alto orden, para el modelo Kuramoto en una red geométrica generalizada a alto orden de las mismas características. La línea azul horizontal indica la media y la zona sombreada de azul es un histograma en vertical que indica la frecuencia con la que han aparecido esos valores.

Es notorio cómo cuando se tienen interacciones de alto orden, el valor de r en el estado sincronizado, en vez de aumentar conforme se aumenta $\sigma^{(2)}$, se reduce. Este fenómeno se da debido a que el sistema se queda atrapado en estados metaestables (que aparecen de manera natural por la forma funcional de las ecuaciones de Kuramoto con interacciones de alto orden [4]) correspondientes a un r menor, pues el estado inicial de los nodos para valores de $\sigma^{(1)}$ altos depende de los estados anteriores, ya que se realizan incrementos adiabáticos. Para caracterizar los estados metaestables, se ha calculado r para 100 realizaciones partiendo de condiciones

iniciales aleatorias con $\sigma^{(1)} = 1.2$, cuya distribución puede verse en la Figura 12(c). Se comprueba cómo el valor medio de r desciende conforme aumenta el acoplo. Además, en la distribución con $\sigma^{(2)} = 2$ aparece una cola correspondiente a multitud de estados con un r más bajo. La varianza del número de estados metaestables parece aumentar con la magnitud de las interacciones de alto orden. En definitiva, las interacciones de alto orden en el modelo de Kuramoto da lugar a multiestabilidad; la solución de r para el estado sincronizado deja de ser única y aparecen múltiples estados metaestables distintos.

3.4. El problema de la sincronizabilidad

Hasta aquí, hemos visto cómo se comporta el modelo Kuramoto al variar su forma funcional o la estructura de la red. Veamos ahora si se encuentran respuestas parecidas con otros sistemas dinámicos más realistas, como el de las células marcapasos introducido en la Sección 2.2.3. Para caracterizar el sistema, en la Figura 13 presentamos el parámetro de orden del modelo, el error de voltaje ($\langle E(v) \rangle$) en función de la magnitud del acoplo de las interacciones a pares. En ausencia de interacciones de alto orden ($\sigma_v^{(2)} = \sigma_h^{(2)} = 0$), observamos cómo el sistema presenta una transición de segundo orden entre un régimen incoherente y uno sincronizado. Las otras dos curvas de la Figura 13 incluyen valores de acoplo de alto orden crecientes, manteniendo entre éstos la misma relación que para los de primer orden, $\sigma_h^{(2)} = \frac{1}{2}\sigma_v^{(2)}$ (todas las simulaciones se han realizado en una red aleatoria de 200 nodos con $\langle k^{(1)} \rangle = \langle k^{(2)} \rangle = 5$). Se puede observar cómo, a diferencia de las simulaciones del modelo de Kuramoto, la introducción de interacciones de alto orden no conlleva un cambio de orden en la transición de fase, sino que actúan aumentando la sincronización globalmente, como ocurría con la dinámica de consenso. Sin embargo, las funciones de acoplo de esta dinámica son equivalentes a las del modelo Kuramoto, el cual sí presenta una transición de primer orden en esta situación.

La explicación de la no aparición de una transición explosiva es debida a la dinámica local. En el modelo Kuramoto, si las frecuencias naturales son idénticas entre todos los nodos, el estado sincronizado es siempre estable. Al establecer las frecuencias naturales en un rango con una cierta distribución, lo que se hace es dificultar la existencia del estado sincronizado, que no se da hasta que el acoplo es lo suficientemente alto como para que la influencia de los términos de interacción puedan dominar la evolución sobre la dinámica local de cada nodo. En el modelo

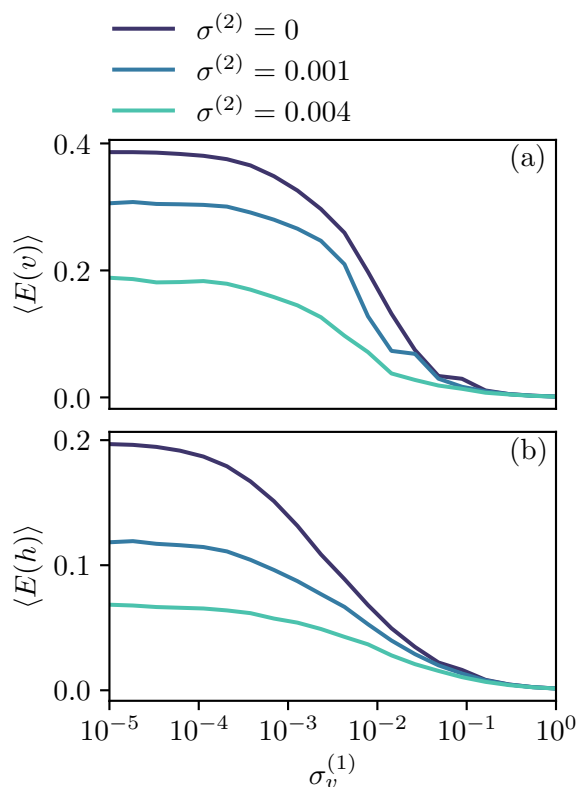


Figura 13: **Sincronización del modelo de células marcapasos en estructura aleatoria.** Evolución del error con respecto al acoplo de las variables v y h del modelo de células marcapasos para dos tres valores del acoplo de alto orden $\sigma_v^{(2)} = 0, 0.001, 0.004$ y $\sigma_h^{(2)} = \frac{1}{2}\sigma_v^{(2)}$, en una red aleatoria de 200 nodos con $\langle k^{(1)} \rangle = \langle k^{(2)} \rangle = 5$.

de las células marcapasos, la distribución que sigue la variable τ_i juega un papel equivalente al de las frecuencias naturales del modelo Kuramoto, por lo que podemos reducir la variabilidad de la dinámica local modulando el intervalo de valores para τ_i para ver si la existencia del estado sincronizado está asegurada como en el modelo de Kuramoto. Para estudiar el diagrama de fases completo, generamos un mapa de color con los errores de voltaje en función de los acoplos de orden $m = 1$ y orden $m = 2$. En la Figura 14(a)-(b) se muestra el diagrama de fases para dos intervalos de la distribución de τ_i y en la Figura 14(c) se muestra para el caso en que todos los valores de las τ_i iguales. Las simulaciones se han hecho sobre una red aleatoria de 100 nodos con $\langle k^{(1)} \rangle = \langle k^{(2)} \rangle = 5$.

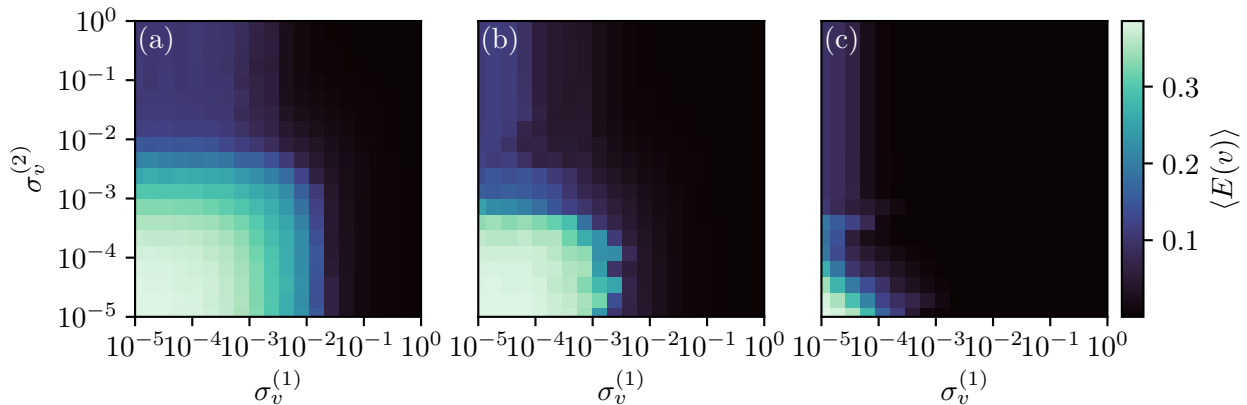


Figura 14: **Sincronización del modelo de células marcapasos en estructura aleatoria variando la distribución de los ritmos internos de cada oscilador.** Diagramas de sincronización del voltaje con respecto al error para 100 nodos siguiendo la dinámica de células marcapasos en una red aleatoria con $\langle k^{(1)} \rangle = \langle k^{(2)} \rangle = 5$. En el panel (a) $\tau_i \in \mathcal{U}[0.4, 1.6]$, en (b) $\tau_i \in \mathcal{U}[0.8, 1.2]$ y en (c) $\tau_i = 1 \forall i$.

Como se puede ver en los tres paneles de la Figura 14, al disminuir el intervalo de la distribución de τ_i , la zona incoherente se reduce considerablemente. Sin embargo no desaparece completamente, ni siquiera en el caso en que todas las τ_i tienen el mismo valor (es decir, el caso en que todas las células marcapasos son idénticas), cosa que sí ocurriría en el modelo Kuramoto, dado que el punto fijo correspondiente al estado sincronizado del modelo Kuramoto siempre existe y es estable.

En cambio, en un modelo como el de las células marcapasos el estado sincronizado siempre existe, pero su estabilidad no está garantizada, es decir, que será estable o inestable en función de los parámetros del sistema[25]. Por tanto, la transición caracterizada en la Figura 10 para el modelo de Kuramoto no es comparable con la transición observada para el modelo de células marcapasos en la Figura 14. Mientras la primera refleja una transición de fase entre una dinámica incoherente dominada por la dinámica local de cada nodo a una dinámica sincronizada, la segunda muestra una transición entre un estado sincronizado inestable y uno estable. Aunque las células tengan valores de τ_i diferentes, el único efecto en el retrato de fases es cuantitativo, ya que modifica el valor del umbral de la transición.

Por tanto, hemos comprobado que las interacciones de alto orden únicamente modifican el orden de ciertas transiciones de fase (como la del modelo de Kuramoto), pero no puede considerarse que tengan un efecto universal en las transiciones a la sincronización de todos los sistemas dinámicos de osciladores acoplados.

4. Interacción tripartita neurona-glia

En la sección anterior, se ha realizado un análisis exhaustivo de la influencia de las interacciones de alto orden en la naturaleza de la transición hacia la sincronización. No obstante, siguiendo la literatura del campo[7], dichas interacciones se han añadido como una generalización de las interacciones a pares, en todos los casos utilizando una forma funcional similar. En esta última sección, buscamos introducir interacciones de alto orden en un sistema dinámico de osciladores acoplados de manera plausible desde el punto de vista biológico.

En particular, consideramos un sistema de neuronas modelizado mediante el modelo Izhikevich. Las neuronas interactúan enviándose pulsos eléctricos mediante la sinapsis. Por tanto, su interacción es a pares. No obstante, la sinapsis entre neuronas puede verse favorecida por otro tipo de células nerviosas, las glías (en particular, los astrocitos). Por tanto, la interacción neurona-neurona-glia sí que constituye un ejemplo real de interacción tripartita, interviniendo y facilitando las sinapsis entre dos neuronas, y por lo tanto interaccionando con ambas[15].

Si no distinguimos entre neuronas y glías, y consideramos la generalización del modelo de Izhikevich a interacciones de alto orden introducido en la Sección 2.2.4, obtenemos el diagrama de fases representado en la Figura 15, para una red aleatoria de 200 nodos con $\langle k^{(1)} \rangle = \langle k^{(2)} \rangle = 5$. La fenomenología es similar a la de las células marcapasos, encontrando una zona no sincronizada que tiende hacia un estado sincronizado conforme se aumentan los acoplos.

No obstante, reconociendo la diferente función de los dos tipos de células, proponemos, como primera aproximación, considerar que los nodos que representen a las glías no tienen un estado ni evolución definida, sino que solo influyen, mediante interacciones a tríos, con otras dos neuronas que estén conectadas entre sí previamente, es decir, que puedan establecer una sinapsis y verse beneficiadas por la intervención de una glía. Un ejemplo de este tipo de estructura puede verse en la Figura 16, donde los nodos que representan a las glías son los hexágonos verdes.

Este modelo representa una generalización alternativa de las ecuaciones. Específicamente, se modifican las funciones de acoplo de manera que $\mathbf{g}_i = \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} a_{ji} \Theta(x_j - x^t)$, donde $\sigma_{ij} = \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} \sum_{k=1}^N a_{ijk}^{(2)}$. Así, las ecuaciones del modelo Izhikevich generalizado, que se aplican solo

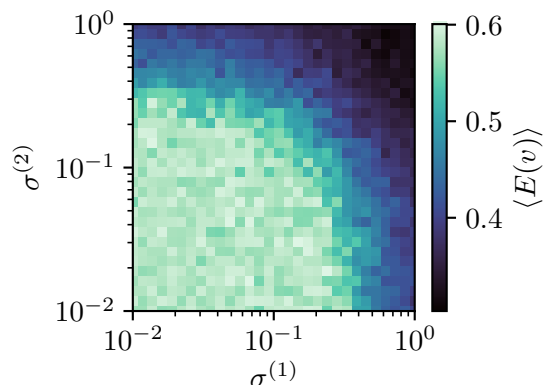


Figura 15: **Sincronización del modelo Izhikevich en estructura aleatoria.** Diagrama de sincronización del modelo Izhikevich con respecto a la desviación estándar media (E) del voltaje (v) en una red aleatoria de 200 nodos con $\langle k^{(1)} \rangle = \langle k^{(2)} \rangle = 5$.

a los nodos que representan neuronas, quedan:

$$\begin{aligned} \dot{v}_i &= a(v_i - v^r)(v_i - v^t) - h_i + \xi_i + \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} a_{ij} \Theta(v_j - v^t) \\ \dot{h}_i &= b(v_i - v^r) - h_i \\ v_i \geq p &\rightarrow \begin{cases} v_i \leftarrow c \\ h_i \leftarrow h_i + d \end{cases} \end{aligned} \quad (32)$$

En este caso, el acoplo se expresa de manera conjunta en σ_{ij} , que tiene como valor $\sigma^{(1)}$ si no hay interacciones de alto orden, y si las hay se le suma un término proporcional a $\sigma^{(2)}$ en función del número de interacciones de alto orden que haya incluyendo a esas dos neuronas.

En la Figura 17 se muestran tres diagramas de sincronización con 200 neuronas de Izhikevich y tres valores para el número de glías. Las simulaciones se han realizado sobre una red aleatoria de 200 nodos con $\langle k^{(1)} \rangle = 5$ que representan las neuronas a los que se añaden un cierto número de glías con $\langle k^{(2)} \rangle = 5$. Es decir, que cada glía se conecta de media con 5 pares de neuronas a través de interacciones de alto orden. La introducción de un mayor número de glías lo que hace es reducir la zona incoherente en el eje del acoplo de alto orden, facilitando la sincronización global de las neuronas. En la Figura 17(c) aparece una pequeña banda de estados aparentemente poco sincronizados para valores de los acoplos altos, pero esto es debido al parámetro de orden usado, ya que se corresponden a estados sincronizados con varianza más grande que aparecen para valores de los acoplos muy altos. En la Figura 22 del Apéndice E se puede ver la evolución temporal de un sistema con una estructura como la del panel (c) de la Figura 17 con un valor del acoplo $\sigma^{(1)} = \sigma^{(2)} = 2$ en el que también se visualizan los estados sincronizados de mayor varianza.

En la Figura 17, la situación es similar a lo que nos encontrábamos en el caso de la Figura 14 de la Subsección 3.4; la zona desincronizada se reduce, pero no cambia el orden de la transición, incluso con una formulación alternativa de las funciones de acoplo de alto orden, con la particularidad de que no se logra llegar al estado sincronizado al aumentar el acoplo de alto orden $\sigma^{(2)}$ si el número de glías no es suficientemente alto.

Algo a mencionar es la importancia de la fracción de glías con respecto a las neuronas, ya que en el cerebro las glías son hasta 50 veces más numerosas que las neuronas[20]. Si se fija el número total de nodos de la red, es más eficiente desde el punto de vista de la sincronización que haya más glías que neuronas, como se ha comprobado en la Figura 17. Para verlo explícitamente desde este enfoque, en la Figura 23 del Apéndice F se muestran tres diagramas de sincronización donde se varía la fracción de glías con respecto a las neuronas.

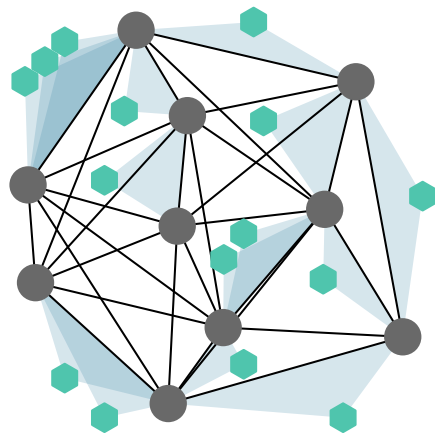


Figura 16: **Modelo de estructura representando interacciones entre neuronas y glías.** Red aleatoria de 25 nodos donde 10 de ellos se comportan como neuronas de Izhikevich (nodos grises), y 15 de ellos se comportan como glías (hexágonos verdes). $\langle k^{(1)} \rangle = 2.4$, $\langle k^{(2)} \rangle = 1.8$.

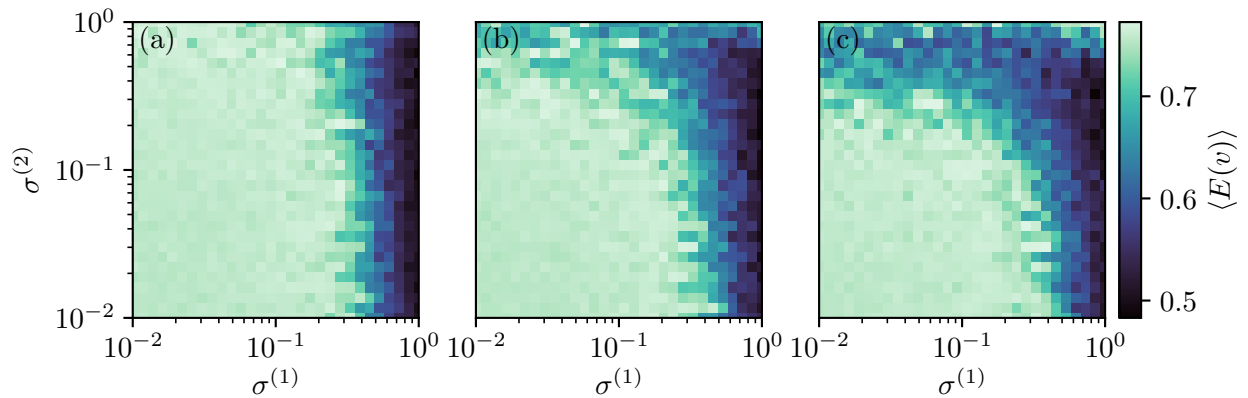


Figura 17: **Sincronización del modelo Izhikevich variando el número de glías.** Diagrama de sincronización del modelo Izhikevich con respecto al error del voltaje en una red aleatoria con 200 nodos representando neuronas de Izhikevich con $\langle k^{(1)} \rangle = 5$ y 50 nodos como glías en (a), 150 en (b) y 250 en (c), con $\langle k^{(2)} \rangle = 5$, para 30 valores de $\sigma^{(1)}$ y 30 de $\sigma^{(2)}$.

Este modelo, incluyendo las interacciones entre glías y neuronas, supondría un primer acercamiento a modelos de neuronas más realistas desde el punto de vista biológico. Se puede aumentar la complejidad de estos modelos añadiendo más elementos para tener en cuenta más fenómenos, por ejemplo, se podría empezar por asociar un estado concreto a las glías. Sajedinia y Hélie[19] proponen modelizarlas como neuronas de Izhikevich gobernadas por otros parámetros que dan como resultado un comportamiento más cercano al observado en la realidad. A partir de aquí, los modelos se pueden variar mucho buscando hacerlos más realistas. Por ejemplo, Mosekilde et al. en[18] proponen una evolución distinta para los estados de las glías, así como diferenciar entre neuronas presinápticas y postsinápticas, o variaciones en las ecuaciones que permitan discernir entre distintos modos en los que operan las neuronas. Hay múltiples enfoques por los que se podría continuar en el estudio de los sistemas biológicos modelizados como sistemas complejos.

5. Conclusiones

En este trabajo, se ha comprobado cómo las interacciones de alto orden efectivamente inducen una transición explosiva para el modelo Kuramoto sobre una estructura aleatoria y se ha derivado analíticamente la condición por la que existe explosividad. Primero, se ha visto cómo este resultado no es universal al ver cómo en la dinámica de consenso la aparición de interacciones de alto orden no conlleva una transición explosiva, ya que la forma funcional de las funciones de acoplo permite expresar éstas como combinación lineal de las interacciones de primer orden, resultando en ningún cambio cualitativo en su comportamiento, y llegando con esto a la conclusión de que para que las interacciones de alto orden provoquen una transición explosiva la forma funcional del término de interacción tiene que ser no lineal.

Posteriormente, se ha analizado el efecto de la estructura, se ha visto que en redes geométricas lo que rige la aparición de transiciones explosivas en el modelo Kuramoto es el grado de solapamiento o *intra-order hyperedge overlap* de las interacciones de alto orden; cuando éste es bajo, se dan transiciones explosivas, pero cuando es lo suficientemente alto, no hay explosividad y la red se sincroniza sólo localmente. Además, se ha constatado que las interacciones de alto orden en el modelo Kuramoto dan lugar a multiestabilidad, es decir, que la solución de r para el estado sincronizado ya no es única para valores altos del acoplo de alto orden y aparecen multitud de estados sincronizados distintos, siendo notorio cómo la media de r se reduce a pesar de que se aumente el acoplo de alto orden.

Con el análisis de la dinámica de las células marcapasos se ha puesto de relieve la importancia de la dinámica local de un sistema dinámico y más aún de la estabilidad del estado sincronizado, dado que este sistema no presenta una transición explosiva pese a tener funciones de acoplo no lineales ya que el estado incoherente no es debido a la predominancia de la dinámica local de los osciladores, sino a la inestabilidad del estado sincronizado.

En un intento de ir más allá de los modelos sintéticos y acercarnos de manera más realista a los sistemas biológicos, se ha introducido el papel de las glías en los sistemas de neuronas, que constituyen un ejemplo realista de interacción grupal. Con base en el modelo Izhikevich para neuronas, se ha propuesto una generalización alternativa para incluir las glías, y se ha abierto la vía de posibles mejoras de estos modelos para acercarse más al comportamiento real de los sistemas biológicos.

En su conjunto, en este trabajo hemos explorado los cambios que puede inducir la introducción de interacciones de alto orden en las transiciones de fase de distintas dinámicas de sincronización, entendiendo también el papel de la organización microscópica de las estructuras utilizadas. Hemos demostrado que, a diferencia de lo asumido anteriormente [7], las interacciones de alto orden no inducen necesariamente transiciones explosivas, sino que existen otros factores, como la naturaleza de la dinámica o la estructura de las interacciones, que también son determinantes.

Referencias

- [1] Gómez-Gardenes, Jesús, et al. *Physical review letters* 106 12 (2011): 128701.
- [2] Malizia, Federico, et al. *arXiv preprint arXiv:2307.03519* (2023).
- [3] Kuramoto, Yoshiki. *Lecture notes in Physics* 30 (1975): 420.
- [4] Tanaka, Takuma, et al. *Physical Review Letters* 106 22 (2011): 224101.
- [5] Olfati-Saber, Reza, et al. *Proceedings of the IEEE* 95 1 (2007): 215-233.
- [6] Olfati-Saber, Reza, et al. *IEEE Transactions on automatic control* 49 9 (2004): 1520-1533.
- [7] Battiston, Federico, et al. *Nature Physics* 17 10 (2021): 1093-1098.
- [8] Skardal, Per Sebastian, et al. *Communications Physics* 3 1 (2020): 218.
- [9] Lucas, Maxime, et al. *Physical Review Research* 2 3 (2020): 033410.
- [10] Ott, Edward, et al. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 18 3 (2008).
- [11] Djabella, Karima, et al. *2007 46th IEEE Conference on Decision and Control*. IEEE, 2007.
- [12] Arola-Fernández, Lluís, et al. *Communications Physics* 5 1 (2022): 264.
- [13] Izhikevich, Eugene M. *IEEE Transactions on neural networks* 14 6 (2003): 1569-1572.
- [14] Faci-Lázaro, Sergio, et al. *Chaos, Solitons & Fractals* 172 (2023): 113547.
- [15] Cho, Woo-Hyun, et al. *Experimental neurobiology* 25 5 (2016): 197.
- [16] Giantomasi, Lidia, et al. *Scientific Reports* 13 1 (2023): 4815.
- [17] Cornell-Bell, Ann H., et al. *Science* 247 4941 (1990): 470-473.
- [18] Mosekilde, Erik, et al. *Biosimulation in biomedical research, health care and drug development*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [19] Sajedinia, Zahra, et al. *Computational intelligence and neuroscience* 2018 1 (2018): 3689487.
- [20] Hatton, Glenn I., et al. *Glial-Neuronal Signaling*. Vol. 1. Springer Science & Business Media, 2004.
- [21] Wang, Megan, et al. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 110 35 (2013): E3350-E3359.
- [22] Andrew, R. David, et al. *Brain research* 498 1 (1989): 175-180.
- [23] Wang, Zhenhua, et al. *Scientific reports* 7 1 (2017): 561.
- [24] Lee, UnCheol, et al. *Scientific reports* 8 1 (2018): 243.
- [25] Gambuzza, Lucia Valentina, et al. *Nature communications* 12 1 (2021): 1255.
- [26] Skardal, P. S. and Arenas, A. *Physical review letters* 122 24 (2019): 248301.

Apéndices

A. Colección de parámetros y siglas

- \mathcal{G} : Grafo.
- \mathcal{H} : Hipergrafo.
- \mathcal{N} : Conjunto de nodos.
- \mathcal{L} : Conjunto de aristas.
- \mathcal{E} : Conjunto de hiperaristas.
- e : Elemento de \mathcal{E} .
- \mathbf{A} : Matriz de adyacencia.
- $\mathbf{A}^{(m)}$: Tensor de adyacencia.
- $a_{ij_1 \dots j_m}^{(m)}$: Elemento de matriz $ij_1 \dots j_m$ del tensor de adyacencia $\mathbf{A}^{(m)}$.
- $B^{(m)}$: Matriz de interacción generalizada de grado m .
- $b_{ij}^{(m)}$: Elemento de matriz ij de $B^{(m)}$.
- $D^{(m)}$: Matriz de grado generalizado de grado m .
- $d_{ij}^{(m)}$: Elemento de matriz ij de $D^{(m)}$.
- $L^{(m)}$: Laplaciano generalizado.
- ℓ_{ij}^m : Elemento de matriz ij de $L^{(m)}$.
- $\bar{\ell}_{ij}$: Elemento de matriz ij del laplaciano efectivo.
- C_i : Coeficiente de clustering local.
- C : Coeficiente de clustering global.
- m : Orden de una interacción en un hipergrafo.
- $k_i^{(m)}$: Grado generalizado de orden m del nodo i .
- $\langle k^{(m)} \rangle$: Grado medio de una red generalizado a orden m .
- $P(k, m)$: Distribución de grado generalizada de los nodos de una red.
- $T_i^{(m)}$: *Intra-order hyperedge overlap*, grado de solapamiento de las aristas concernientes al nodo i .
- $S_i^{(m)}$: Número de vecinos únicos del nodo i .
- $S_i^{(m),+}$: Número máximo de vecinos únicos posibles del nodo i .
- $S_i^{(m),-}$: Número mínimo de vecinos únicos posibles del nodo i .

- \mathcal{T} : *Intra-order hyperedge overlap* global, solapamiento medio de las hiperaristas de una red.
- N : Número de nodos de una red.
- r_m : Radio de orden m con el que se construye una estructura geométrica generalizada a alto orden.
- ρ : Densidad de nodos en el espacio.
- L : Longitud del lado de la cuadrícula en la que están situados los nodos de una estructura geométrica aleatoria.
- \mathbf{x}_i : Vector n -dimensional del estado del nodo i con respecto a las variables de un sistema dinámico concreto.
- $\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i)$: Función que describe la dinámica local del nodo i .
- $\mathbf{g}^{(m)}$: Función de acoplo de orden m .
- $\sigma^{(m)}$: Valor del acoplo de las interacciones de orden m .
- θ_i : Estado del nodo i en el modelo Kuramoto.
- ω_i : Dinámica local del modelo Kuramoto, constantes llamadas frecuencias naturales.
- $g(\omega)$: Distribución que siguen las frecuencias naturales del modelo Kuramoto.
- $f(\theta, \omega, t)$: Función de densidad de osciladores continua usada en el límite termodinámico del modelo Kuramoto.
- \mathcal{U} : Distribución uniforme continua.
- z : Parámetro de orden que da cuenta del grado de sincronización global de una red.
- r : Módulo del parámetro de orden z .
- Ψ : Fase media de la dinámica colectiva de un sistema con el modelo Kuramoto.
- r_{loc} : Parámetro de orden que da cuenta del grado de sincronización local de una red.
- v : Variable del modelo de células *pacemakers* y del modelo Izhikevich que representa el potencial de membrana de las respectivas células.
- h : Variable del modelo de células *pacemakers* y del modelo Izhikevich que representa concentraciones iónicas en el primer caso y corrientes inhibitorias en el segundo.
- $\sigma_v^{(m)}$: Acoplo de orden m de la ecuación correspondiente a la variable v del modelo de células marcapasos.
- $\sigma_h^{(m)}$: Acoplo de orden m de la ecuación correspondiente a la variable h del modelo de células marcapasos.
- En el contexto del modelo de células marcapasos:

- τ_i : Ritmo interno del oscilador i .
 - $a, \lambda, \tau_{in}, \tau_{out}, I_{stim}, \tau_{open}, \tau_{close}$: Parámetros del modelo. a controla el número de olas que producen los nodos, I_{stim} es la corriente que recibe cada célula, y los distintos τ representan tiempos de apertura y cierre de las corrientes de las concentraciones iónicas.
- En el contexto del modelo Izhikevich:
 - a : Parámetro que controla la magnitud de las fluctuaciones por debajo del potencial umbral.
 - b : Parámetro que controla la magnitud de las fluctuaciones por debajo del potencial umbral.
 - c : Regula el reseteo de la variable v tras el disparo del potencial de acción de la neurona.
 - d : Regula el reseteo de la variable h tras el disparo del potencial de acción de la neurona.
 - p : Valor del potencial para que se produzca el reseteo de las variables v y h .
 - v^r : Potencial de reposo.
 - v^t : Potencial umbral.
 - ξ_i : *Inputs* que recibe la neurona debido al ruido ambiental característico de los sistemas biológicos.
 - g_w^2 : Varianza de la gaussiana que es una de las fuentes del ruido ξ_i .
 - λ : Frecuencia con la que se liberan neurotransmisores en las terminales presinápticas que son una de las fuentes del ruido ξ_i .
 - g_S : Magnitud de los transmisores que se liberan en las terminales presinápticas con frecuencia λ que son una de las fuentes del ruido ξ_i .
 - $E(v)$: Desviación estándar media de todos los instantes temporales, que se usa como parámetro de orden en los modelos de células marcapasos y el modelo Izhikevich.
 - δ_{ij} : Delta de Kronecker.

B. Valores de las constantes de los distintos modelos usados

τ_i	a	τ_{in}	τ_{out}	τ_{open}	τ_{close}	v_{gate}	η_{gate}
$\mathcal{U}[0.4, 1.6]$	0.02	0.3	6	120	150	0.13	0.001

Tabla 2: Valores usados de las constantes del modelo de células *pacemakers*

a	b	c	d	p	v^r	v^t	g_w	g_S	λ
7.5	0.5	0.0	3.5	6.0	0.0	1.0	2.0	0.2	0.5

Tabla 3: Valores usados de las constantes del modelo Izhikevich

C. Gráficas incluyendo trayectorias *backwards*

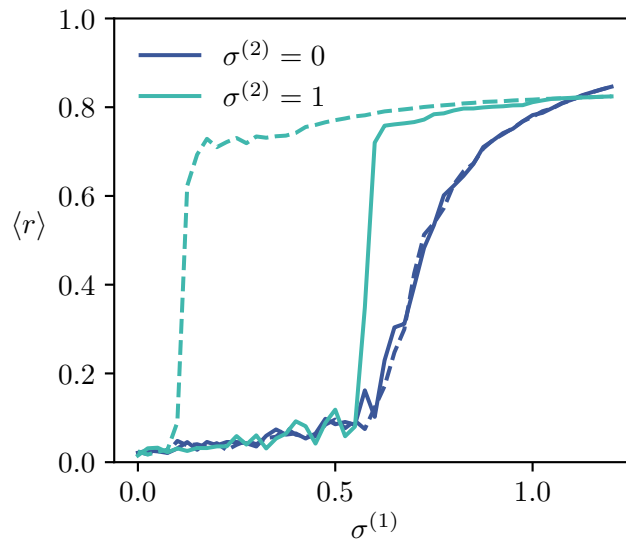


Figura 18: **Sincronización del modelo Kuramoto en estructura aleatoria.** Diagrama de sincronización del modelo Kuramoto para un sistema con y sin interacciones de alto orden, en un red aleatoria de 1000 nodos con $\langle k^{(1)} \rangle = \langle k^{(2)} \rangle = 5$, incluyendo las trayectorias realizadas con disminuciones adiabáticas (*backwards*).

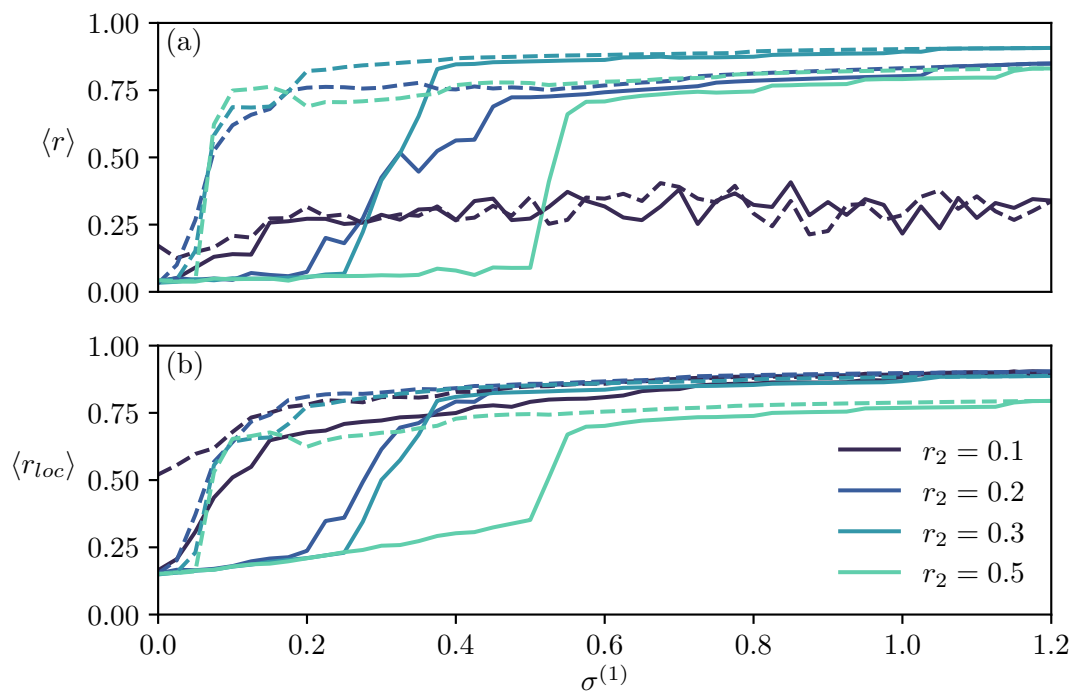


Figura 19: **Sincronización del modelo Kuramoto al variar el radio de una estructura geométrica.** Diagrama de sincronización con respecto al parámetro de orden global r en el panel (a) y al parámetro de orden local r_{loc} en (b) del modelo Kuramoto en una red geométrica generalizada a alto orden de 500 nodos con $\langle k^{(1)} \rangle = \langle k^{(2)} \rangle = 5$, $\sigma^{(2)} = 1.0$ y $r_1 = 0.06$, variando r_2 . El *intra-order hyperedge overlap* de cada estructura es, en orden creciente del valor del radio: $\mathcal{T}^{(2)} = 0.44, 0.15, 0.07, 0.03$, incluyendo las trayectorias realizadas con disminuciones adiabáticas (*backwards*).

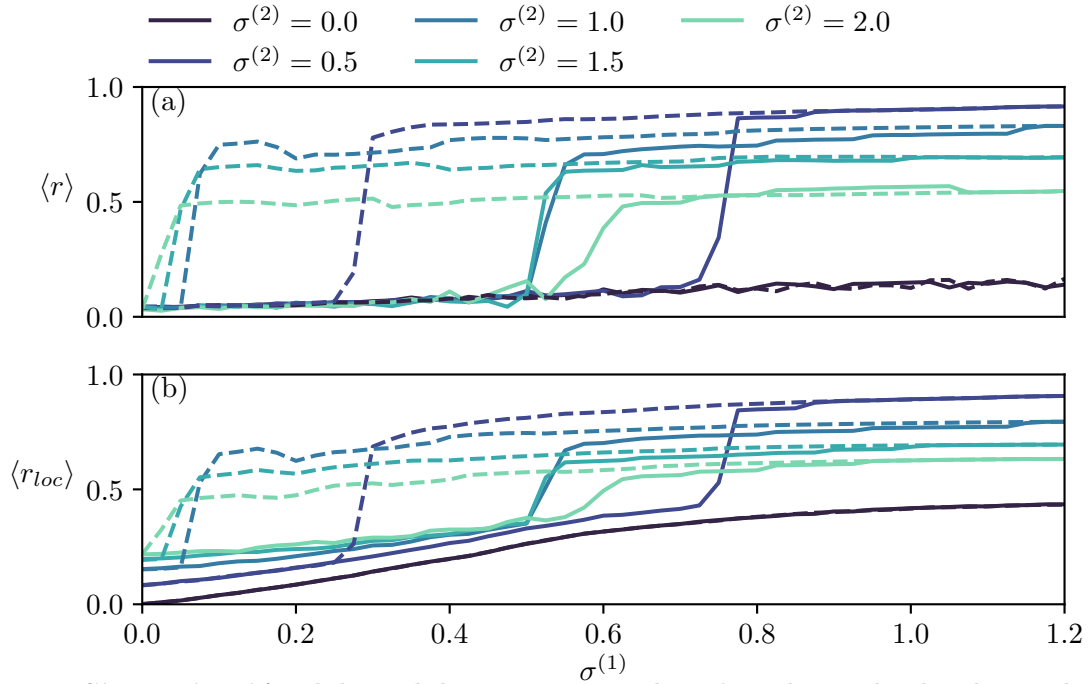


Figura 20: **Sincronización del modelo Kuramoto al variar el acoplo de alto orden en una estructura geométrica.** Diagrama de sincronización del modelo Kuramoto con respecto a los parámetros de orden global y local respectivamente en los paneles (a) y (b) en una red geométrica generalizada a alto orden de 500 nodos con $\langle k^{(1)} \rangle = \langle k^{(2)} \rangle = 5$, $r_1 = 0.06$, $r_2 = 0.5$ y $\mathcal{T}^{(2)} = 0.03$, variando el acoplo de alto orden $\sigma^{(2)}$, incluyendo las trayectorias realizadas con disminuciones adiabáticas (*backwards*).

D. Resultados para el modelo de células marcapasos original

Aquí se presentan los mismos resultados obtenidos para el modelo de células marcapasos, pero en su versión original, es decir, sin la función seno en las funciones de acoplo, de manera que:

$$\begin{aligned}
 \dot{v}_i &= f(v_i, h_i) + \sigma_v^{(1)} \sum_{j=1}^N a_{ij}^{(1)} (v_j - v_i) + \frac{1}{2!} \sigma_v^{(2)} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_{ijk}^{(2)} (v_j + v_k - 2v_i) \\
 \dot{h}_i &= g(v_i, h_i) + \sigma_h^{(1)} \sum_{j=1}^N a_{ij}^{(1)} (h_j - h_i) + \frac{1}{2!} \sigma_h^{(2)} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_{ijk}^{(2)} (h_j + h_k - 2h_i)
 \end{aligned} \tag{33}$$

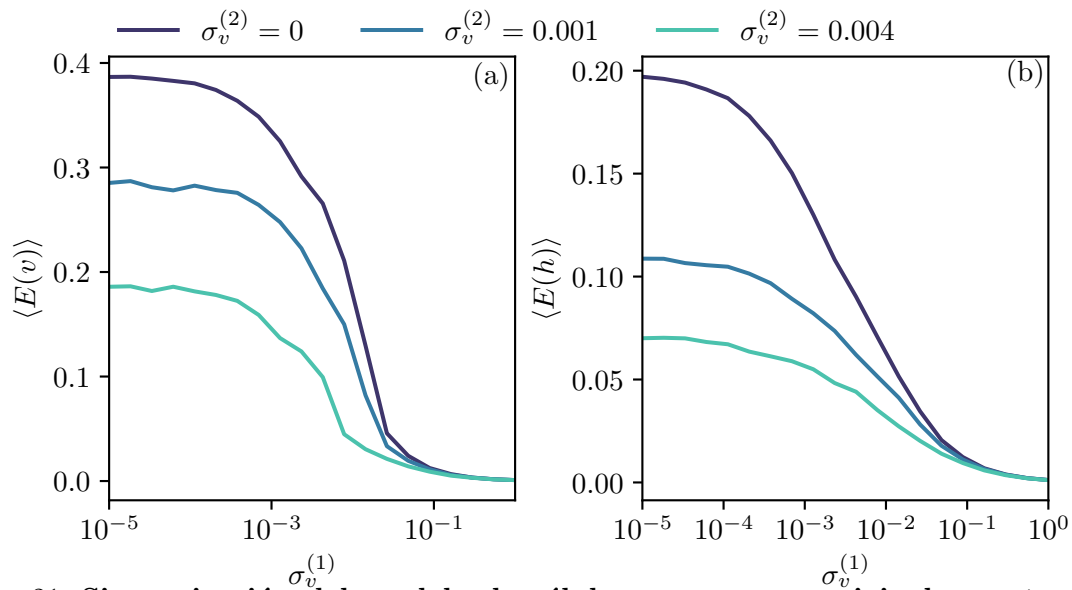


Figura 21: **Sincronización del modelo de células marcapasos original en estructura aleatoria.** Evolución del error con respecto al acoplo de las variables v e h del modelo de células marcapasos con las funciones de acoplo lineales para tres valores del acoplo de alto orden $\sigma_v^{(2)} = 0, 0.001, 0.004$ y $\sigma_h^{(2)} = \frac{1}{2}\sigma_v^{(2)}$, en una red aleatoria de 100 nodos con $\langle k^{(1)} \rangle = \langle k^{(2)} \rangle = 5$.

E. Modelo Izhikevich para valores altos del acoplo

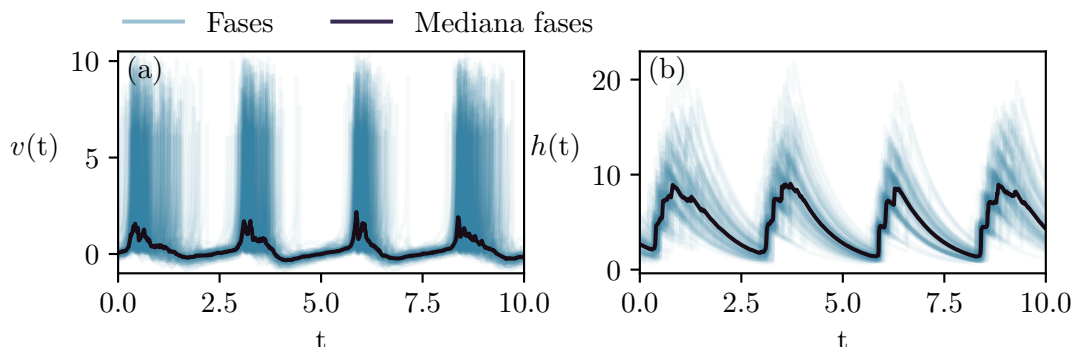


Figura 22: **Modelo Izhikevich para valores altos de los acoplos.** Evolución temporal de las variables del modelo Izhikevich en una red aleatoria de 200 nodos (sombreado) representando neuronas y la mediana de la evolución temporal (oscuro), con $\langle k^{(1)} \rangle = 5$, y 250 nodos representando glías con $\langle k^{(2)} \rangle = 5$, con valores del acoplo de $\sigma^{(1)} = \sigma^{(2)} = 2$.

F. Modelo Izhikevich fijando el número total de neuronas y glías

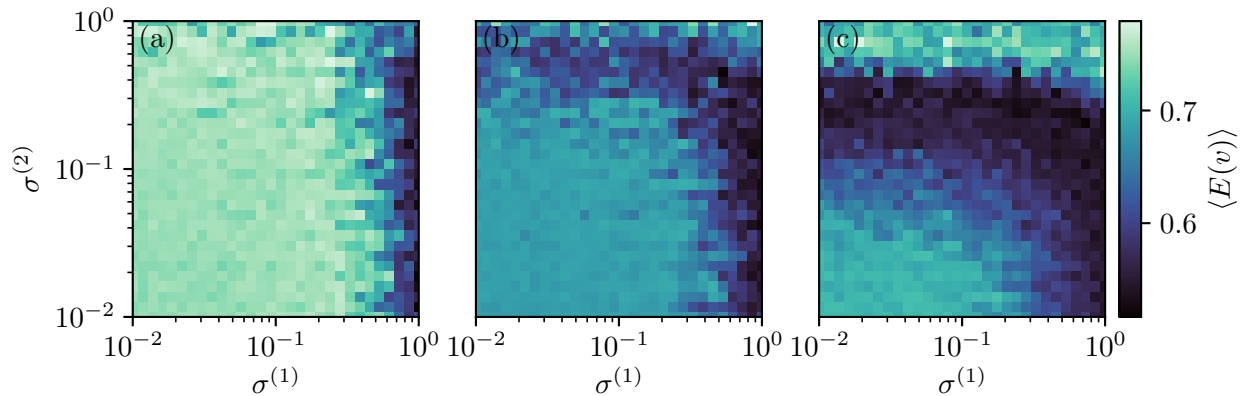


Figura 23: **Sincronización del modelo Izhikevich variando la fracción de glías.** Diagrama de sincronización del modelo Izhikevich con respecto al error del voltaje en una red aleatoria con 200 nodos en total, siendo en el panel (a) 50 nodos como neuronas de Izhikevich, en (b) 100 nodos como neuronas y en (c) 150 nodos como neuronas y el resto de nodos comportándose como glías en cada uno de los casos, con $\langle k^{(1)} \rangle = 5$ para las neuronas y $\langle k^{(2)} \rangle = 5$ para las glías, para 30 valores de $\sigma^{(1)}$ y 30 de $\sigma^{(2)}$. La banda superior que aparecen en los paneles (b) y (c) con un valor del error mayor se corresponde a estados sincronizados con mayor varianza, algo que ya ocurría en el caso de la Figura 17 y se debe al parámetro de orden usado.

G. Diagrama de estabilidad del modelo Kuramoto con interacciones de alto orden

Extraído del artículo de Skardal y Arenas[8].

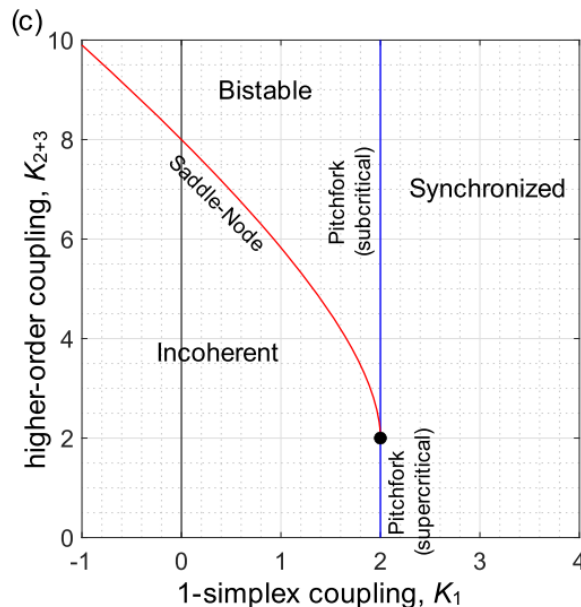


Figura 24: **Diagrama de estabilidad.** Describe los estados incoherente, sincronizado y biestable en función del acoplo de orden 1 K_1 ($\sigma^{(1)}$ en este trabajo) y del acoplo de alto orden K_{2+3} ($\sigma^{(2)}$ en este trabajo). Las líneas azul y roja se corresponden con una bifurcación *pitchfork* y *saddle-node* respectivamente, que colisionan en el punto negro indicado en $(K_1, K_{2+3}) = (2, 2)$. Para $K_{2+3} < 2$ y $K_{2+3} > 2$ la bifurcación *pitchfork* es supercrítica y subcrítica, respectivamente.